

21

剛体のつりあい

◎ 解説動画



\ 押さえよ /



剛体のつりあいの問題は

1. 力のつりあい
2. 力のモーメントのつりあい

の式を立てて解く。

大きさを考慮し、力を加えても変形しない物体を考えて、これを剛体とよぶ。剛体がつりあうためには、力のつりあいとともに、剛体が回転しないための条件として力のモーメントのつりあが必要になる。

POINT

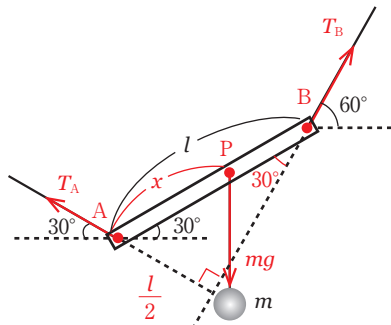


剛体のつりあいの問題は

1. 力のつりあい
2. 力のモーメントのつりあい

の式を立てて解く。

長さが l で質量が無視できる棒 AB に質量 m のおもりをつるし、両端につけた 2 本の糸で支える。棒 AB は水平と 30° 、A 端、B 端につけた糸は、それぞれ水平と 30° 、 60° の角をなしている。重力加速度の



大きさを g として、A 端、B 端につけた糸の張力の大きさと、おもりをつるした位置を A 端からの長さで求めたい。どうすればよいのだろうか。

① 力のつりあいの式を立てよう。

$$\text{水平方向: } \frac{\sqrt{3}T_A}{2} = \frac{T_B}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{鉛直方向: } \frac{T_A}{2} + \frac{\sqrt{3}T_B}{2} = mg \quad \cdots \textcircled{2}$$

② 力のモーメントのつりあいの式を立てよう。

点 A のまわりの力のモーメントのつりあい

$$T_B \times \frac{l}{2} = mg \times \frac{\sqrt{3}x}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

③ A、B 端につけた糸の張力の大きさを求めよう。

$$\left(\frac{T_A}{2} + \sqrt{3} \times \frac{T_B}{2} = mg \quad \cdots \textcircled{2} \right)$$

$$\textcircled{1} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入 } \frac{T_A}{2} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}T_A}{2} = mg$$

$$T_A = \frac{mg}{2}$$

$$T_A \text{ の値を } \textcircled{1} \text{ に代入 } T_B = \frac{\sqrt{3}mg}{2}$$

④ おもりをつるした位置を求めよう。

 T_B の値を③に代入

$$\frac{\sqrt{3}mg}{2} \times \frac{l}{2} = mg \times \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$x = \frac{l}{2}$$

22

重心

◎ 解説動画



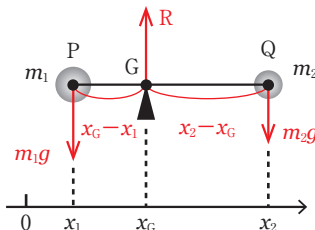
\ 押さえよ /

重心…^{ごうたい}剛体の全質量が集中していると見なせる点

(質量中心)

⇒ 重心で剛体を支えると回転を起こさない。

質量 m_1 のおもり P と質量 m_2 のおもり Q を軽い棒でつないだ物体がある。この物体の重心 G の位置座標 x_G を、おもり P, Q の位置座標 x_1, x_2 を用いて表したい。



重心 G でこの物体を支えると回転を起こさない。



G のまわりの力のモーメントのつりあいより

$$m_1 g (x_G - x_1) = m_2 g (x_2 - x_G)$$

$$(m_1 + m_2) x_G = m_1 x_1 + m_2 x_2$$

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

一般に、質量 m_1, m_2, m_3, \dots の質点の位置座標を x_1, x_2, x_3, \dots とすると、質点全体の重心の位置座標 x_G は、次のように表される。

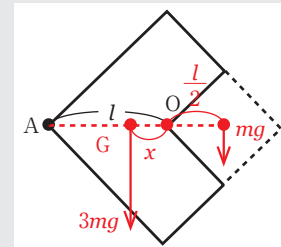
POINT



$$\text{重心 } x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}$$

\ やって
みよう /

質量が $4m$ で厚さが一様な正方形の板から、中心 O を通るように板の $\frac{1}{4}$ の正方形を切り取る。残った右図のような板の重心の位置を求めよ。ただし、OA の長さを l とする。



解答

O のまわりの力のモーメントのつりあい

$$3mg \times x = mg \times \frac{l}{2}$$

$$x = \frac{l}{6}$$

O から A に向かって $\frac{l}{6}$ の位置 …… 答

23

慣性の法則

◎ 解説動画



\ 押さえよ /



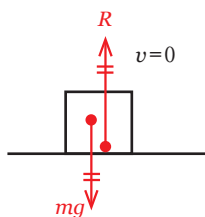
力のつりあい ⇔ 静止または等速直線運動

摩擦のない水平面上で静止している物体について考える。

① 物体にはたらく力はどう

なっているか？

つりあっている

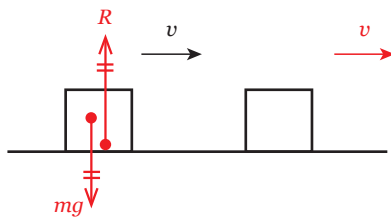


② 物体はその後どうなるか？

静止をつづける

③ 物体がはじめ運動していると、その後どうなるか？

等速直線運動をつづける



④ 慣性の法則(運動の第1法

則)とは何か？

物体に力がはたらかないか、または、はたらく力がつりあっているとき、静止している物体は静止をつづけ、運動をしている物体は等速直線運動をつづける。これを慣性の法則(運動の第1法則)という。

POINT



力のつりあい ⇔ 静止または等速直線運動

慣性の法則は、物体には力を受けなければ同じ速度を保とうとする性質があることを示している。この性質を慣性という。

\ やって
みよう /

「慣性」という語を用いて、次の現象が起こる理由を説明せよ。
「電車内に立っているとき、電車が急停車したので倒れそうになった。」

解答例 ……体は慣性によって運動をつづけようとするのに、足だけが床との摩擦によって静止しようとするから。



24

運動の法則

◎ 解説動画



\ 押さえよ /

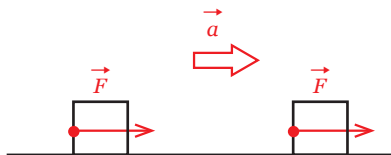


運動の法則 $\vec{a} = k \frac{\vec{F}}{m}$ (k は比例定数)

摩擦のない水平面上での物体について考える。

- ⬇ 物体に水平方向の力 \vec{F} を加えると、物体はその後どうなるか？

力 \vec{F} の向きに **加速度 \vec{a}** で運動する。



- ⬇ 物体に加える力の大きさを 2 倍, 3 倍, … にすると, 生じる加速度の大きさはどうなるか？

2 倍, 3 倍, … になる。すなわち, 加速度の大きさは加えた力の大きさに **比例** する。

- ⬇ 物体の質量 m を 2 倍, 3 倍, … にすると, 生じる加速度の大きさはどうなるか？

$\frac{1}{2}$ 倍, $\frac{1}{3}$ 倍, … になる。

すなわち, 加速度の大きさは物体の質量 m に **反比例** する。

- ⬇ 運動の法則 (運動の第 2 法則) とは何か？

物体に力 \vec{F} を加えると, 力 \vec{F} の向きに **加速度 \vec{a}** が生じ, その加速度の大きさは力の大きさに **比例** し, 物体の質量 m に **反比例** する。

すなわち, $\vec{a} = k \frac{\vec{F}}{m}$ (k は比例定数)

これを **運動の法則** (運動の第 2 法則) という。

POINT



運動の法則 $\vec{a} = k \frac{\vec{F}}{m}$ (k は比例定数)

25

運動方程式

◎ 解説動画



\ 押さえよ /

運動方程式 $ma = F$

復習

質量 m の物体が \vec{F} の力を受けるとき、生じる加速度 \vec{a} は、運動の法則により次のように表される。

$$\vec{a} = k \frac{\vec{F}}{m} \quad \cdots \textcircled{1} (k \text{ は比例定数})$$

[運動の3法則]

これまでに学習した運動の法則をまとめると、次のようになる。運動の第1法則は**慣性**の法則、第2法則は**運動**の法則、そして第3法則は**作用・反作用**の法則である。これらの法則は、ニュートンによって見出されたので、**ニュートンの運動の3法則**といわれる。

[運動方程式]

①式において、 $k=1$ となるように力の単位を定めれば、 $m\vec{a} = \vec{F}$ となり便利である。この式を**運動方程式**という。

質量 1kg の物体にはたらいて、 1m/s^2 の加速度を生じる力の大きさを **1 ニュートン (N)** とする。

POINT

運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$

運動方程式の \vec{a} , \vec{F} は、大きさと向きをもつ**ベクトル**であるが、一直線上の運動の場合、これらの向きを**符号**で区別して a , F と表すと、運動方程式は $ma = F$ とかくこともできる。

26

運動方程式の立てかた①

◎ 解説動画



運動方程式を立てる手順

手順1 m : 注目する物体を決める。

手順2 a : 加速度 a と同じ向きに x 軸, それと垂直な方向に y 軸を設定する。

手順3 F : 力を図示し, x, y 方向に分解する。

\ 押さえよ /



復習

運動方程式 $ma = F$

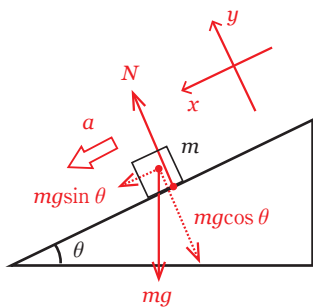
傾斜角 θ のなめらかな斜面上に質量 m の物体を静かに置く。重力加速度の大きさを g とする。

運動方程式を立てよう。

手順1 m : 注目する物体を決める。

手順2 a : 加速度 a と同じ向きに x 軸, それと垂直な方向に y 軸を設定する。

手順3 F : 力を図示し, x, y 方向に分解する。



運動方程式

$$x \text{ 方向 : } ma = mg \sin \theta \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$y \text{ 方向 : } m \times 0 = N - mg \cos \theta \quad \cdots \textcircled{2}$$

物体の加速度の大きさはいくらか？

$$\textcircled{1} \text{ より } a = g \sin \theta$$

斜面が物体に及ぼす抗力の大きさはいくらか？

$$\textcircled{2} \text{ より } N = mg \cos \theta$$

物体を置いてから時間が t だけ経過した。物体の速さとすべった距離はいくらか？

$$v = (g \sin \theta) t$$

$$x = \frac{1}{2} (g \sin \theta) t^2$$

運動方程式を立てる手順1～3は、これからもよく使うので、しっかり覚えておきましょう。

運動方程式を立てる手順

手順1 m : 注目する物体を決める。

手順2 a : 加速度 a と同じ向きに x 軸, それと垂直な方向に y 軸を設定する。

手順3 F : 力を図示し, x, y 方向に分解する。

秘

テクニック

27

運動方程式の立てかた②

◎ 解説動画



復習

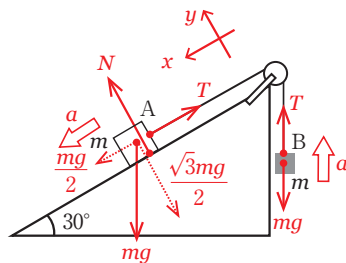
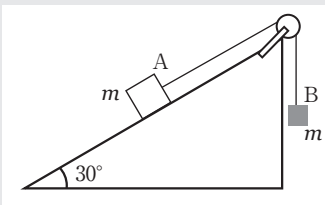
運動方程式を立てる手順

手順1 m : 注目する物体を決める。手順2 a : 加速度 a と同じ向きに x 軸, それと垂直な方向に y 軸を設定する。手順3 F : 力を図示し, x, y 方向に分解する。

やってみよう /

Q

傾斜角 30° のなめらかな斜面上に質量 m の物体 A をのせ, これに糸をつないで軽い滑車を経て同じ質量の物体 B をつるす。手をはなすと両物体は動き始める。重力加速度の大きさを g とする。



つづき / Q

(1) A, B の加速度の大きさを求めよ。

解答

運動方程式より

$$A: \quad ma = \frac{mg}{2} - T \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$B: \quad ma = T - mg \quad \cdots \textcircled{2}$$

①+②より

$$2ma = -\frac{mg}{2}$$

$$a = -\frac{g}{4}$$

 $\frac{g}{4}$ 答

つづき / Q

(2) 糸の張力の大きさを求めよ。

解答

 $a = -\frac{g}{4}$ を②に代入して

$$-\frac{mg}{4} = T - mg$$

$$T = \frac{3mg}{4} \quad \cdots \text{答}$$

つづき / Q

(3) 斜面が物体 A に及ぼす抗力の大きさを求めよ。

解答

斜面に垂直な方向の力のつりあいより

$$N = \frac{\sqrt{3}mg}{2} \quad \cdots \text{答}$$

28

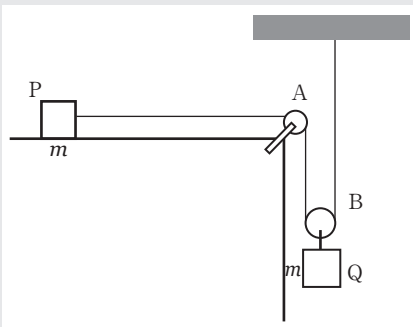
動滑車を含む物体の運動

◎ 解説動画

\\ つづき /
 やって
 みよう /

Q

なめらかな水平面上に質量 m の物体 P をのせ、これに糸をつけて、軽く摩擦のない滑車 A, B (A は定滑車, B は動滑車) を経て、他端を天井に固定する。B の両端の糸はともに鉛直で、B には質量 m の物体 Q をつるす。重力加速度の大きさを g とする。



\\ つづき /

Q

(1) Q の移動距離が s のとき、P の移動距離はいくらか。

解答

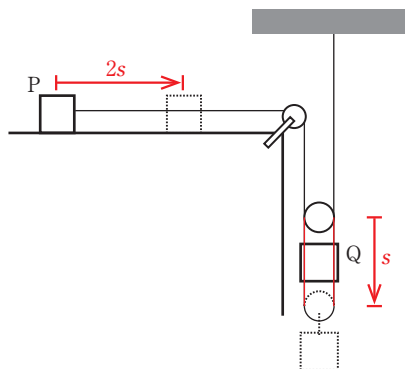
 $2s$ 答

\\ つづき /

Q

(2) Q の速さが v のとき、P の速さはいくらか。

解答

 $2v$ 答\\ つづき /
 Q

(3) P, Q の加速度の大きさをそれぞれ求めよ。

解答

運動方程式より

$$P: m \cdot 2a = T \quad \cdots \textcircled{1}$$

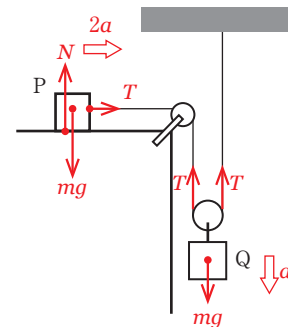
$$Q: ma = mg - 2T \quad \cdots \textcircled{2}$$

①を②に代入して

$$ma = mg - 4ma$$

$$a = \frac{g}{5}$$

$$P: \frac{2g}{5} \quad Q: \frac{g}{5} \quad \cdots \text{答}$$

\\ つづき /
 Q

(4) 糸の張力の大きさを求めよ。

解答

 $a = \frac{g}{5}$ を①に代入して

$$T = 2m \times \frac{g}{5} = \frac{2mg}{5} \quad \cdots \text{答}$$

29

静止摩擦力

◎ 解説動画



\ 押さえよ /

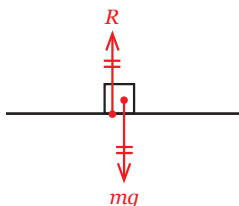


最大摩擦力

(すべり始める直前の摩擦力)

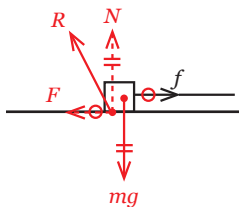
$$F_0 = \mu_0 N$$

① あらい水平面上で静止している物体にはたらく力を図示しよう。



② 物体に水平右向きの力 f を加えたが、物体は静止したままであった。このとき物体にはたらく力を図示しよう。

ここで、抗力 R の面に垂直な方向の分力を **垂直抗力 N** 、面に平行な方向の分力を **静止摩擦力 F** という。



③ 力のつりあいの式を立てよう。

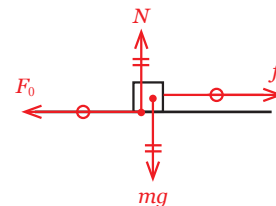
$$\text{水平方向: } F = f$$

$$\text{鉛直方向: } N = mg$$

※ここで出てきた mg , f , N , F は、それぞれの力の大きさを表すこととします。

④ f を大きくしていき、物体がすべり始める直前について、物体にはたらく力を図示しよう。

このときの静止摩擦力 F は最大値 F_0 になっており、**最大摩擦力** という。 F_0 は垂直抗力 N に **比例** し、次のように表すことができる。



POINT

最大静止摩擦力 $F_0 = \mu_0 N$ μ_0 : 静止摩擦係数\ やって
みよう /

質量 m の物体をのせた板を徐々に傾けていくと、傾斜角が 30° を越えたところで物体がすべり始めた。物体と板との間の静止摩擦係数はいくらか。

解答

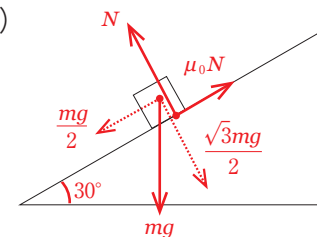
力のつりあいより(すべり始める直前)

$$\text{斜面に平行な方向: } \mu_0 N = \frac{mg}{2}$$

$$\text{斜面に垂直な方向: } N = \frac{\sqrt{3}mg}{2}$$

上の2式より N を消去して

$$\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cdots \text{答}$$



30

動摩擦力

◎ 解説動画

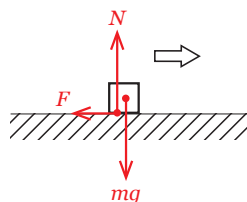


\ 押さえよ /

動摩擦力 $F = \mu N$

あらい水平面上を質量 m の物体が右向きにすべっている。

📌 物体にはたらく力を図示しよう。



動いている物体にはたらく摩擦力 F を **動摩擦力** という。動摩擦力 F も垂直抗力に **比例** し、次のように表される。

POINT

動摩擦力 $F = \mu N$ μ : 動摩擦係数

復習

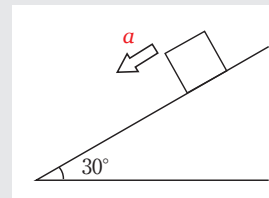
最大静止摩擦力 $F_0 = \mu_0 N$ μ_0 : 静止摩擦係数

一般に、動摩擦係数 μ は静止摩擦係数 μ_0 よりも小さい。したがって、動摩擦力 μN は最大静止摩擦力 $\mu_0 N$ よりも **小さい**。

やっ
て
み
よ
う

Q

傾斜角 30° のあらい斜面上を物体がすべり降りている。運動の向きを正の向きにとると加速度はいくらになるか。ただし、面と物体との間の動摩擦係数を μ 、重力加速度の大きさを g とする。



斜面に平行な方向の運動方程式より

$$ma = \frac{mg}{2} - \mu N \quad \dots \textcircled{1}$$

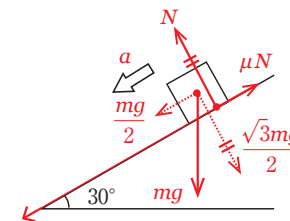
斜面に垂直な方向の力のつりあいより

$$N = \frac{\sqrt{3}mg}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

②を①に代入して

$$ma = \frac{mg}{2} - \mu \cdot \frac{\sqrt{3}mg}{2}$$

$$a = \frac{(1 - \sqrt{3}\mu)g}{2} \quad \dots \text{答}$$



31

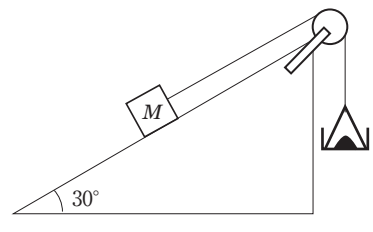
摩擦のある運動①

◎ 解説動画

やって
みよう /

Q

傾斜角 30° のあらい斜面上に、質量 M の物体が糸に結ばれて静止している。糸は滑車を経て他端に質量の無視できる皿をつけている。皿には砂がのせられ、この砂の質量をわずかずつ変えていく。斜面と物体との間の静止摩擦係数を μ_0 、動摩擦係数を μ 、重力加速度の大きさを g とする。



つづき /

Q

(1) 砂の質量を m_1 より大きくすると、物体は斜面を上り始める。質量 m_1 はいくらか。

解答

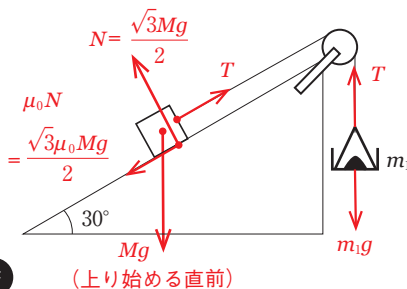
力のつりあいより

$$\text{物体: } T = \frac{Mg}{2} + \frac{\sqrt{3}\mu_0 Mg}{2}$$

$$\text{砂: } T = m_1 g$$

上の2式より、 T を消去して

$$m_1 = \frac{(1 + \sqrt{3}\mu_0)M}{2} \dots \text{答}$$



摩擦力の向き

「物体が動いている向き、または動こうとする向きと
逆向きにはたらく」

秘

テクニック

つづき /
Q

(2) 砂の質量を m_2 より小さくすると、物体は斜面を下り始める。質量 m_2 はいくらか。

解答

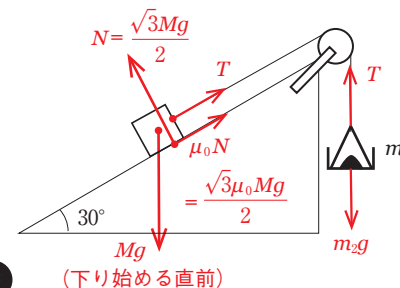
力のつりあいより

$$\text{物体: } T + \frac{\sqrt{3}\mu_0 Mg}{2} = \frac{Mg}{2}$$

$$\text{砂: } T = m_2 g$$

上の2式より、 T を消去して

$$m_2 = \frac{(1 - \sqrt{3}\mu_0)M}{2} \dots \text{答}$$



砂の質量を $2M (> m_1)$ にしたところ、物体は斜面を上っていった。

つづき /
Q

(3) 砂の質量を $2M (> m_1)$ にしたところ、物体は斜面を上っていった。物体の加速度の大きさはいくらか。

解答

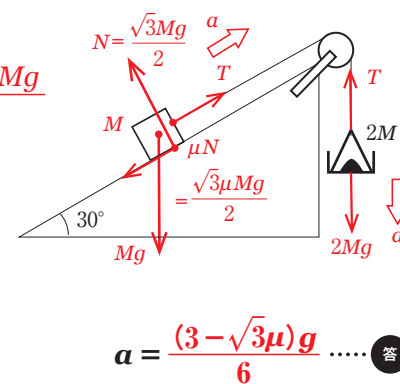
運動方程式は

$$\text{物体: } Ma = T - \frac{Mg}{2} - \frac{\sqrt{3}\mu Mg}{2}$$

$$\text{砂: } 2Ma = 2Mg - T$$

上の2式より、 T を消去して

$$3Ma = \frac{(3 - \sqrt{3}\mu)Mg}{2}$$



$$a = \frac{(3 - \sqrt{3}\mu)g}{6} \dots \text{答}$$

32

摩擦のある運動②

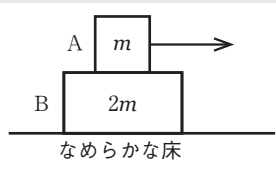
◎ 解説動画



やってみよう /

Q

なめらかな水平な床上に、質量 m の物体 A と質量 $2m$ の物体 B が重ねて置かれている。A と B の間にだけ摩擦があり、その動摩擦係数を μ 、重力加速度の大きさを g とする。A に加える水平な力を徐々に大きくしていく、その大きさが F のとき、A、B は一体となって運動した。



つづき /

Q

(1) A と B の間にはたらく摩擦力の大きさはいくらか。

解答

運動方程式は

$$A: ma_1 = F - f \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$B: 2ma_1 = f \quad \cdots \textcircled{2}$$

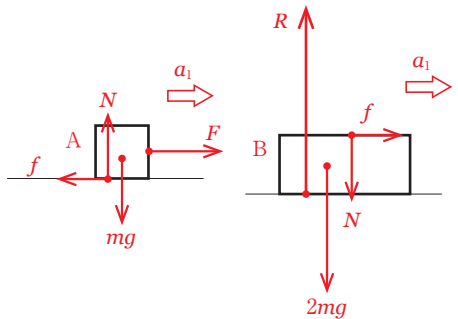
$$\textcircled{2} \text{ より } a_1 = \frac{f}{2m}$$

これを①に代入

$$\frac{f}{2} = F - f$$

$$\frac{3f}{2} = F$$

$$f = \frac{2F}{3} \quad \cdots \text{答}$$



摩擦力の向き

「物体が動いている向き、または動こうとする向きと
逆向きにはたらく」

秘

テクニック

つづき /
Q

(2) A に加える力の大きさが $\frac{3F}{2}$ より大きくなると、A は B の上をすべり始める。A と B の間の静止摩擦係数はいくらか。

解答

運動方程式は

$$A: ma_2 = \frac{3F}{2} - \mu_0 mg \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$B: 2ma_2 = \mu_0 mg \quad \cdots \textcircled{4}$$

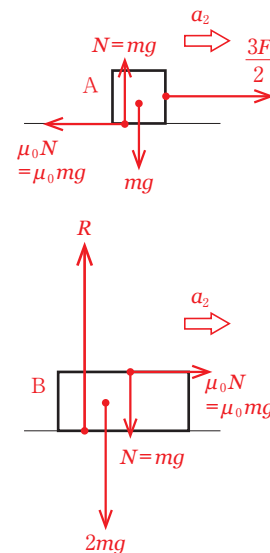
$$\textcircled{4} \text{ より } a_2 = \frac{\mu_0 g}{2}$$

これを③に代入

$$\frac{\mu_0 mg}{2} = \frac{3F}{2} - \mu_0 mg$$

$$\frac{3\mu_0 mg}{2} = \frac{3F}{2}$$

$$\mu_0 = \frac{F}{mg} \quad \cdots \text{答}$$

つづき /
Q

(3) A に加える力の大きさが $2F$ になると、A、B は別々の加速度で運動する。A、B の加速度の大きさは、それぞれいくらか。

解答

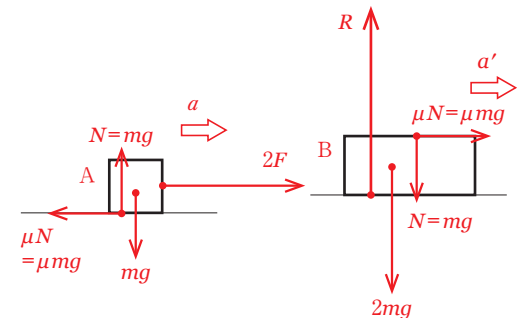
運動方程式は

$$A: ma = 2F - \mu mg$$

$$a = \frac{2F}{m} - \mu g \quad \cdots \text{答}$$

$$B: 2ma' = \mu mg$$

$$a' = \frac{\mu g}{2} \quad \cdots \text{答}$$



33

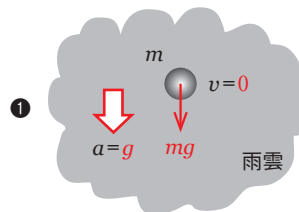
空気抵抗と終端速度

◎ 解説動画

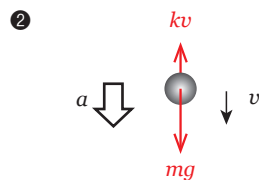


質量 m の雨粒が空気中を落下する運動について考える。雨粒は重力を受けて落下するが、速さ v に比例(比例定数 k)する空気抵抗を受ける。重力加速度の大きさを g とし、雨粒の落下運動を次の①～③の過程に分けて考えよう。

- ①雨粒は落下を始めた瞬間、速さは 0 なので、雨粒には**重力**だけがはたらき、雨粒の加速度は鉛直**下**向きで、大きさは g である。

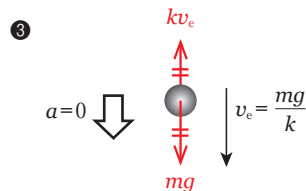


- ②雨粒の速さが v になると、雨粒には**重力**以外に空気**抵抗**力がはたらき、その向きは鉛直**上**向きで、大きさは kv である。したがって、雨粒の運動方程式は、鉛直下向きの加速度を a とし、次のように表すことができる。



$$ma = mg - kv \quad \dots (i)$$

$kv < mg$ の間は、加速度 $a > 0$ であるため v は時間とともに**増加**する。



- ③やがて $kv = mg$ になると、加速度 $a = 0$ となり、 v は**一定**になる。これ以後、雨粒は**等速直線**運動をする。このときの速度を終端速度とよび、その大きさを v_e で表すと、(i)式において $a = 0$, $v = v_e$ とし、

$$m \times 0 = mg - kv_e$$

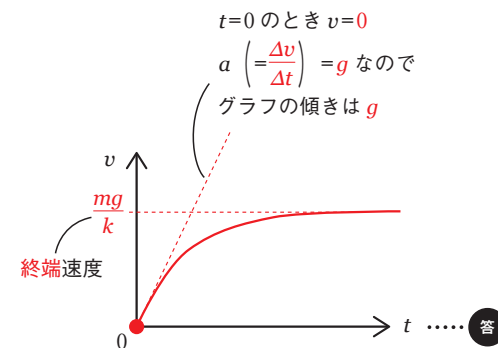
$$v_e = \frac{mg}{k}$$

と求められる。

やってみよう /
Q

雨粒が落下を始めた時刻を $t=0$ とし、時刻 t に対する雨粒の速さ v の変化をグラフに表せ。

解答



34

運動量と力積の関係

◎ 解説動画

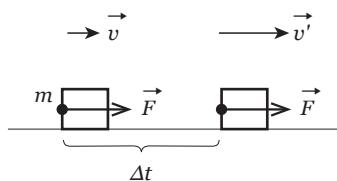


\ 押さえよ /



運動量の変化は、受けた力積に等しい

摩擦のない水平面上にある質量 m の物体について考える。物体に水平方向の一定の力 \vec{F} を時間 Δt の間加えると、物体の速度が \vec{v} から \vec{v}' に変化した。



⬇ この間の物体の運動方程式を立てよう。

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{\Delta t} = \vec{F}$$

$$m\vec{v}' - m\vec{v} = \vec{F}\Delta t$$

復習

$$\text{加速度 } \vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

上で求めた式で、(力)×(時間)を力積、(質量)×(速度)を運動量と定めると、上の式は次のように言い表すことができる。

POINT



物体の運動量の変化は、物体が受けた力積に等しい。

\ やって
みよう /

Q

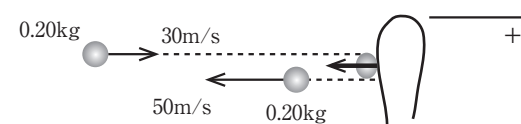
質量 0.20kg のボールが速さ 30m/s で飛んでくる。

\ つづき /

Q

(1) このボールを速さ 50m/s で逆向きにバットで打ち返した。ボールが受けた力積を求めよ。

解答



$$0.20 \times (-50) - 0.20 \times 30 = -16$$

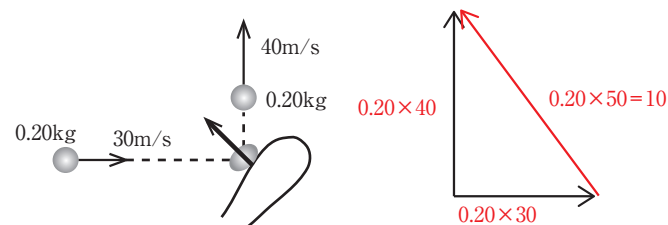
ボールの初速度と逆向きに 16N・S 答

\ つづき /

Q

(2) このボールを飛んできた向きと 90° の向きに 40m/s で打ち返した。バットがボールに与えた力積を求めよ。

解答



図の向きに 10N・S 答

35

運動量保存則

◎ 解説動画



\ 押さえよ /



運動量保存則

衝突前の運動量の和 = 衝突後の運動量の和

復習

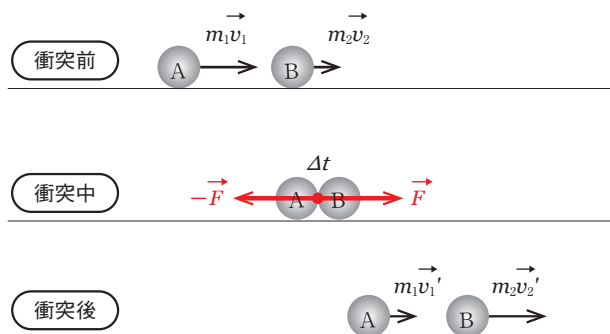
運動方程式から運動量と力積の関係を導け。

$$\vec{ma} = \vec{F}$$

$$m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{F}$$

$$m \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{\Delta t} = \vec{F}$$

$$m\vec{v}' - m\vec{v} = \vec{F}\Delta t$$



質量 m_1 の小球 A が速度 \vec{v}_1 、質量 m_2 の小球 B が速度 \vec{v}_2 で、同一直線上を動いて衝突し、衝突後の速度がそれぞれ \vec{v}_1' 、 \vec{v}_2' になった。衝突中、小球 A と B が接触している時間を Δt 、B が A から受けた平均の力を \vec{F} とすると、A が B から受けた平均の力は、**作用・反作用** の法則により、 $-\vec{F}$ となる。

⬇ 小球 A, B それぞれについて、運動量の変化と力積の関係をかこう。

$$A: m_1\vec{v}_1' - m_1\vec{v}_1 = -\vec{F}\Delta t$$

$$B: m_2\vec{v}_2' - m_2\vec{v}_2 = \vec{F}\Delta t$$

⬇ 上の式の辺々を加えて、式を整理しよう。

$$m_1\vec{v}_1' - m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2' - m_2\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

すなわち、衝突前後で、2 物体 A, B の**運動量の和**は変わらない。これを**運動量保存則**という。

POINT



運動量保存則

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

⬇ 運動量保存則はどんなときに成り立つのか？

複数の物体をまとめて考えるとき、これを**系**とよぶ。一般に、系内の物体が互いに力(**内力**)を及ぼしあうだけで、系外から力(**外力**)を受けない場合、運動量保存則は成り立つ。

POINT



外力を受けていない ⇒ **運動量保存則**が成立

36

運動量保存則の使いかた

◎ 解説動画



復習

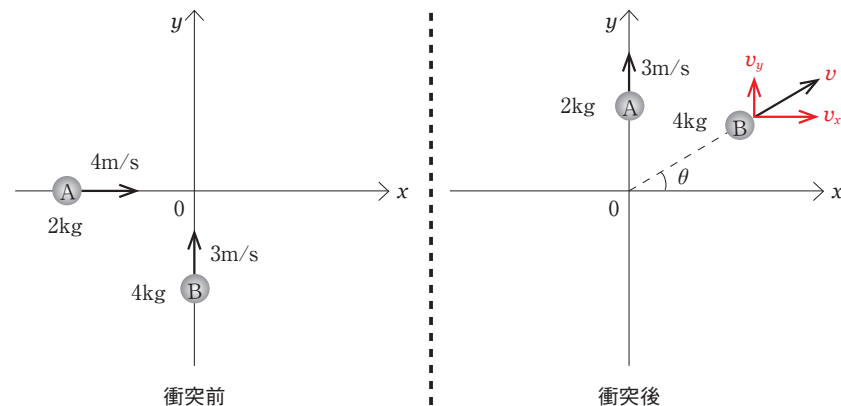
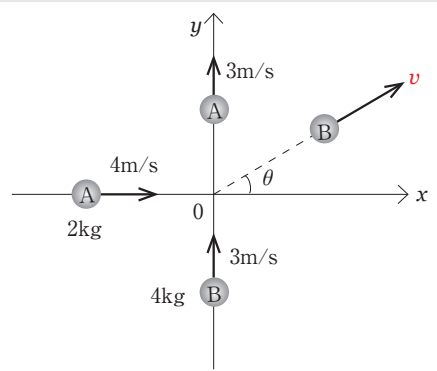
運動量保存則

衝突前の運動量の和 = 衝突後の運動量の和

やってみよう

Q

なめらかな水平面上に xy 座標軸がある。 x 軸上を 2kg の球 A が 4m/s で正の向きに、 y 軸上を 4kg の球 B が 3m/s で正の向きに進んで原点で衝突し、A は y 軸上を 3m/s で正の向きに進んだ。B はどの向きにどれだけの速さで進んだか。向きは、 x 軸とのなす角を θ として、 $\tan \theta$ の値で表せ。



解答

運動量保存則より

$$x \text{ 方向: } 2 \times 4 = 4v_x \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$y \text{ 方向: } 4 \times 3 = 2 \times 3 + 4v_y \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } v_x = 2$$

$$\textcircled{2} \text{ より } 4v_y = 6 \quad v_y = 1.5$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2.5\text{m/s}$$

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{3}{4}$$

$$\tan \theta = \frac{3}{4} \text{ を満たす角 } \theta \text{ の向きに } 2.5\text{m/s} \quad \cdots \textcircled{\text{答}}$$

37

物体の分裂・結合

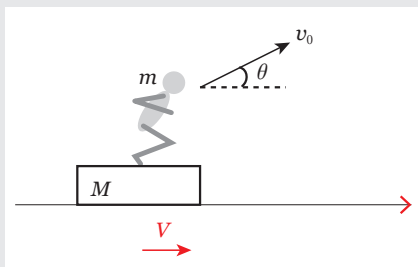
◎ 解説動画



やってみよう /

Q

水平でなめらかな床上に質量 M の板が置かれており、板上に質量 m の人が静止している。この人が水平と角度 θ をなす右斜め上方に速さ v_0 で跳躍する。跳躍後板が進む向きと速さを求めよ。



解答

運動量保存則(水平方向)

分裂後の板の速さを V とする。

$$0 = mv_0 \cos \theta + MV$$

$$V = -\frac{mv_0 \cos \theta}{M}$$

復習

外力を受けていない



運動量保存則が成立

左向きに $\frac{mv_0 \cos \theta}{M}$ の速さ …… 答

POINT



運動量保存則を用いるときは、**座標軸**を設定する。

秘

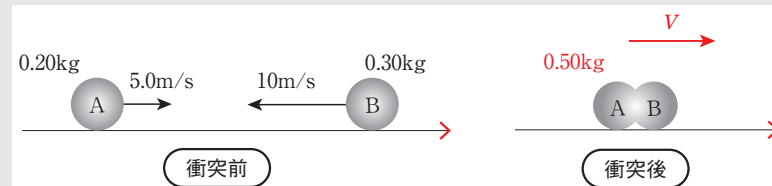
テクニック

未知数は、すべて**正の値**としておく。

やってみよう /

Q

なめらかな水平面上を質量 0.20kg の物体 A が右向きに速さ 5.0m/s で進んで来て、同一直線上を左向きに速さ 10m/s で進んできた質量 0.30kg の物体 B と正面衝突をする。衝突後、2つの物体が一体となる場合、その物体が進む向きと速さを求めよ。



解答

運動量保存則(水平方向)

一体となった物体の速さを $V [\text{m/s}]$ とする。

$$0.20 \times 5.0 + 0.30 \times (-10) = 0.50 \times V$$

$$0.50V = -2.0$$

$$V = -4.0$$

左向きに **4.0m/s** の速さ …… 答

38

はね返り係数

◎ 解説動画



\ 押さえよ /



$$\text{はね返り係数 } e = -\frac{\text{あと}}{\text{まえ}}$$

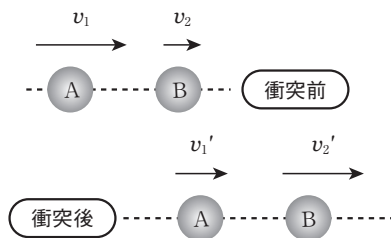
小球 A, B が一直線上を速度 v_1, v_2 で進んで衝突し、速度が v_1', v_2' になったとする。

このとき、2 球が近づく速さと遠ざかる速さの比 e は一定値になる。このことは

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$$

という式で表される。 e を 2 球の **はね返り係数** といい、**0** と **1** の間の値をとる。

はね返り係数の式は、**運動量保存則** とともに用いることが多いので、衝突前後の相対速度の比の形で記憶しておくと便利である。



・ $e = 1$ の衝突を **(完全)弾性衝突** といい

$$1 = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$$

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1'$$

となるから、2 球が近づく速さと遠ざかる速さが **等しく**、もつともよくはね返る。

・ $0 \leq e < 1$ の衝突を **非弾性衝突** といい、衝突後に遠ざかる速さが衝突前に近づく速さよりも **小さく** なる。

・ $e = 0$ の衝突を **完全非弾性衝突** といい

$$0 = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$$

$$v_1' = v_2'$$

となるから、衝突後、2 球は **一体となって** 運動する。

POINT



$$\text{はね返り係数 } e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$$

秘

テクニック

$$\text{はね返り係数 } e = -\frac{\text{あと}}{\text{まえ}}$$

39

2 物体の衝突

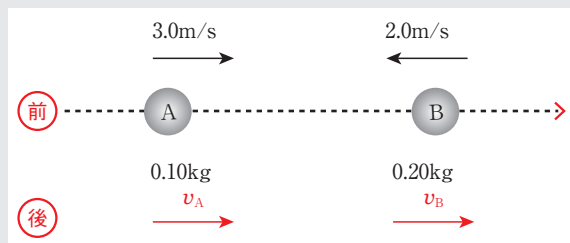
◎ 解説動画



やってみよう /

Q

0.10kg の小球 A が右向きに 3.0m/s, 0.20kg の小球 B が左向きに 2.0m/s で、互いに逆向きに一直線上を進んで衝突した。2 球のはね返り係数を 0.50 とすると、衝突後、A, B はそれぞれどちら向きに何 m/s で進むか。



解答

右向きを正の向きとし、衝突後の A, B の速度をそれぞれ v_A , v_B とする。

復習

運動量保存則を用いるときは、座標軸を設定する。

運動量保存則より

$$\begin{aligned} 0.10 \times 3.0 + 0.20 \times (-2.0) \\ = 0.10v_A + 0.20v_B \\ v_A + 2v_B = -1 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

秘

テクニック

未知数は、すべて
正の値としておく。

秘

テクニック

はね返り係数 $e = -\frac{\text{あと}}{\text{まえ}}$

解答

はね返り係数の式より

$$0.50 = -\frac{v_A - v_B}{3.0 - (-2.0)}$$

$$v_A - v_B = -2.5 \quad \dots \textcircled{2}$$

①-②より

$$3v_B = 1.5 \quad v_B = 0.50$$

 $v_B = 0.50$ を①に代入

$$v_A = -2.0$$

A は左向きに 2.0m/s, B は右向きに 0.50m/s …… 答

40

なめらかな床との衝突

◎ 解説動画



秘

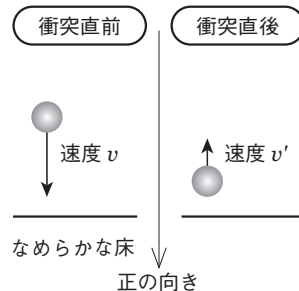
テクニック

はね返り係数 $e = -\frac{\text{あと}}{\text{まえ}}$

(1) 小球が床に垂直に衝突する場合

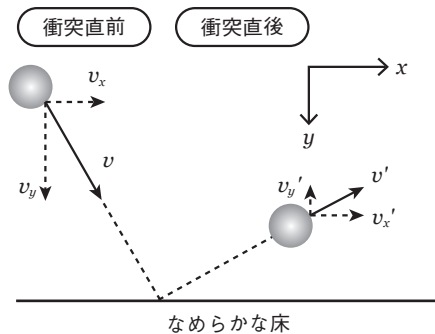
衝突直前の速度を v 、衝突直後の速度を v' とすると、小球と床との間のはね返り係数 e は、次のように表される。

$$e = -\frac{v'}{v}$$



(2) 小球がなめらかな床に斜めに衝突する場合

衝突の直前、直後の速度 v 、 v' を床に平行な成分 v_x 、 v_x' と床に垂直な成分 v_y 、 v_y' とに分解して考える。

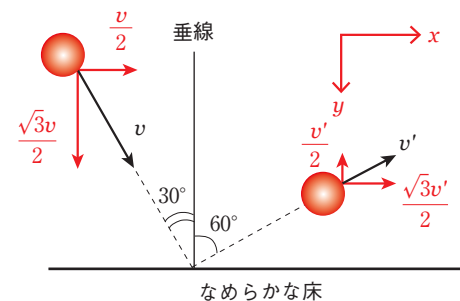
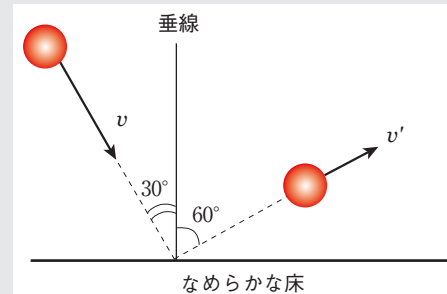
⬇ v_x' とはね返り係数 e は、どのように表されるか？

$$v_x' = v_x, \quad e = -\frac{v_y'}{v_y} \dots \text{答}$$

やってみよう / Q

右図のように小球がなめらかな床に 30° で衝突し、 60° ではね返った。このとき、小球と床の間のはね返り係数 e はいくらか。

衝突直前、直後の小球の速さを v 、 v' とする。



解答

 x 方向の速度成分は一定だから

$$\frac{v}{2} = \frac{\sqrt{3}v'}{2}$$

$$v = \sqrt{3}v'$$

 y 方向のはね返り係数の式より

$$e = -\frac{-\frac{v'}{2}}{\frac{\sqrt{3}v}{2}} = \frac{v'}{\sqrt{3}v} = \frac{v'}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}v'} = \frac{1}{3}$$

$$e = \frac{1}{3} \dots \text{答}$$