

41

仕事

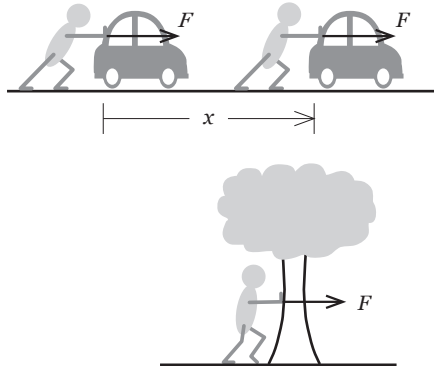
◎ 解説動画



\ 押さえよ /

仕事 $W = Fx$

物体に一定の大きさの力 F を加え、力の向きに距離 x だけ動かしたとき、力は物体に Fx の仕事をしたという。



POINT

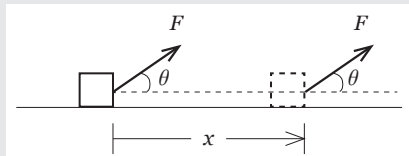


仕事 $W = Fx$ F : 力の大きさ
 x : 力の向きに動いた距離 (力の向きの変位)

上の式から、仕事の単位は $\text{N} \cdot \text{m}$ だとわかる。これを **ジュール (J)** と表す。

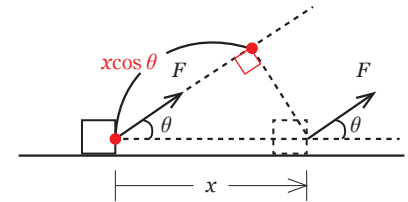
\ やって
みよう /

物体に一定の大きさの力 F を加え、力と角 θ をなす向きに x だけ動かした。力がした仕事 W はどのように表されるか。

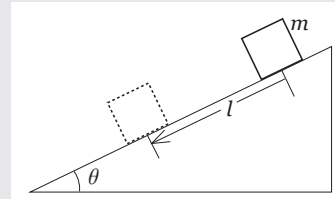


◎ 解答

$$W = Fx \cos \theta \quad \cdots \text{答}$$

\ やって
みよう /

傾斜角 θ のあらい斜面上を質量 m の物体が、距離 l だけすべり降りた。この間に物体にはたらく (1) ~ (3) の力がした仕事を求めよ。ただし、動摩擦係数を μ 、重力加速度の大きさを g とする。



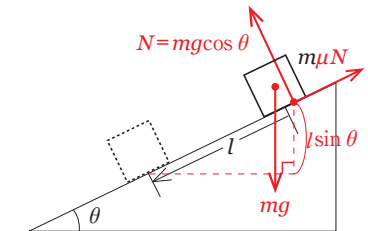
\ つづき /



(1) 重力のした仕事 W_1 を求めなさい。

◎ 解答

$$W_1 = mgl \sin \theta \quad \cdots \text{答}$$



\ つづき /



(2) 垂直抗力のした仕事 W_2 を求めなさい。

◎ 解答

$$W_2 = N \times 0 = 0 \quad \cdots \text{答}$$

\ つづき /



(3) 動摩擦力のした仕事 W_3 を求めなさい。

◎ 解答

$$W_3 = \mu N \times (-l) = \mu mg \cos \theta \times (-l)$$

$$W_3 = -\mu mgl \cos \theta \quad \cdots \text{答}$$

42

仕事率

◎ 解説動画



\ 押さえよ /



$$\text{仕事率 } P = \frac{W}{t} = Fv$$

人や機械がする仕事の能率は、一定の時間にどれだけの仕事をするかで表される。そ

こで、1秒あたりにする仕事を考え、これを**仕事率**という。 t [s] 間で W [J] の仕事をするとき、その仕事率 P は次の式で表される。

復習

$$\text{仕事 } W = Fx$$

POINT



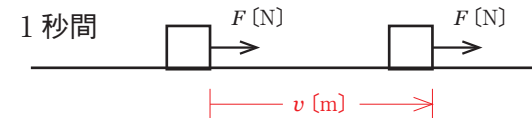
$$\text{仕事率 } P = \frac{W}{t}$$

上の式から、仕事率の単位は **J/s** だとわかる。これを**ワット** [W] と表す。

 やって
みよう /
Q

物体に一定の力 F [N] を加え、力の向きに速さ v [m/s] で等速度運動させた。この力が物体にした仕事率はいくらか。

解答



$$\text{仕事率 } P = Fv \text{ [W]} \cdots \cdots \text{答}$$

POINT



$$\text{仕事率 } P = Fv$$

43

仕事の原理

◎ 解説動画



\ 押さえよ /



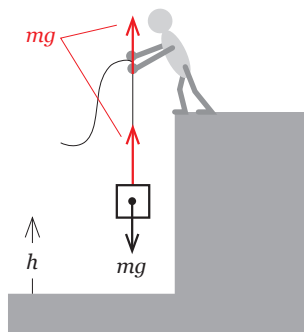
仕事の原理

道具を使っても仕事の量は**変わらない**

復習

仕事 $W = Fx$

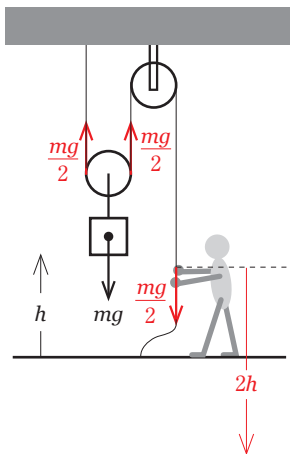
(a)～(c)の3つの方法で、質量 m の物体を高さ h まで引き上げるのに要する仕事 W を計算する。



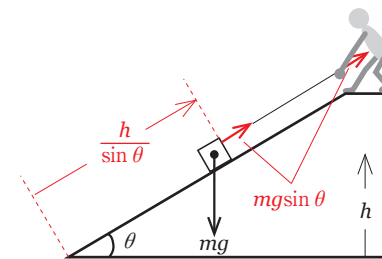
(a) 直接引き上げる

引く力 $F = mg$ 引く距離 $x = h$ 要する仕事 $W = mgh$

(b) 軽い動滑車を使って引き上げる

引く力 $F = \frac{mg}{2}$ 引く距離 $x = 2h$ 要する仕事 $W = mgh$ 

(c) なめらかな斜面を使って引き上げる

引く力 $F = mg \sin \theta$ 引く距離 $x = \frac{h}{\sin \theta}$ 要する仕事 $W = mgh$ 

44

運動エネルギー

◎ 解説動画



\ 押さえよ /



$$\text{運動エネルギー} \quad K = \frac{1}{2}mv^2$$

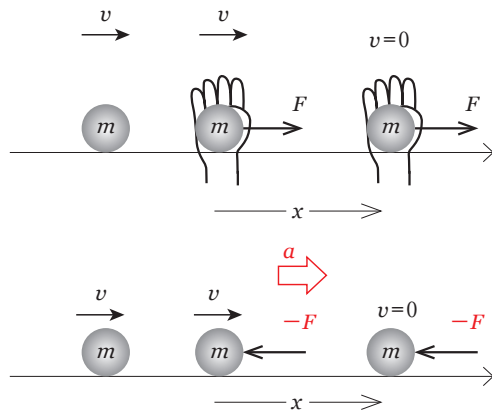
⬇ エネルギーとは何か？

エネルギーとは「他の物体に**仕事**をする能力」のことをいう。したがって、エネルギーの単位は、仕事の単位と同じ**ジュール〔J〕**を用いる。

⬇ 質量 m のボールが速さ v で運動している。このボールがもっているエネルギーは、どのように表されるか？

ヒント) ボールがもっているエネルギーの値は、ボールが他の物体にした**仕事**から計算することができる。

いま、このボールを手で受けとめることを考える。ボールが手に触れてから止まるまでに、ボールは手に一定の力 F を及ぼし、手を距離 x だけ押すものとする。



このとき、ボールが手にした仕事は、 Fx である。一方、ボールはこの間、手から $-F$ の力を受けるので、ボールの加速度は運動方程式を解いて

$$ma = -F$$

$$a = -\frac{F}{m}$$

と表される。この加速度は**一定値**なので、ボールは、**等加速度直線**運動をする。したがって、この加速度を $v^2 - v_0^2 = 2ax$ の式に代入すると、

$$0^2 - v^2 = 2 \cdot \left(-\frac{F}{m}\right) \cdot x$$

$$Fx = \frac{1}{2}mv^2$$

となり、ボールが手にした仕事、すなわちボールがもっていた**エネルギー** K は、

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

と表される。一般に、運動している物体がもっているエネルギーを**運動エネルギー**といい、次のように表すことができる。

POINT



$$\text{運動エネルギー} \quad K = \frac{1}{2}mv^2$$

45

エネルギーと仕事の関係①

◎ 解説動画



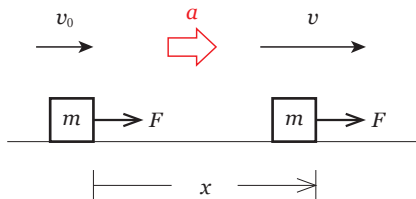
\ 押さえよ /



エネルギーと仕事の関係

(はじめのエネルギー) + (外からされた仕事) = (あとのエネルギー)

一直線上を速さ v_0 で運動している質量 m の物体に、一定の力 F を加えながら距離 x だけ運動させたところ、速さが v になった。



① 力 F を加えている間の物体の加速度はいくらか？

解答

運動方程式 $ma = F$ より

$$a = \frac{F}{m} \cdots \text{答}$$

上で求めた加速度は定数なので、物体は等加速度直線運動をする。

② 等加速度直線運動の関係式 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ を用いて、物体の運動エネルギーと物体がされた仕事との関係を求めよう。

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot \frac{F}{m} \cdot x$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = Fx \cdots \text{答}$$

復習

運動エネルギー K

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

上で求めた関係は、次のように解釈することもできる。

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = Fx$$

運動エネルギーの**変化** = 外からされた**仕事**

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + Fx = \frac{1}{2}mv^2$$

(はじめのエネルギー) + (外からされた**仕事**) = (あとのエネルギー)

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + Fx = \frac{1}{2}mv^2 \cdots \text{別解}$$

POINT



エネルギーと仕事の関係

(はじめのエネルギー) + (外からされた**仕事**) = (あとのエネルギー)

46

エネルギーと仕事の関係②

◎ 解説動画



復習

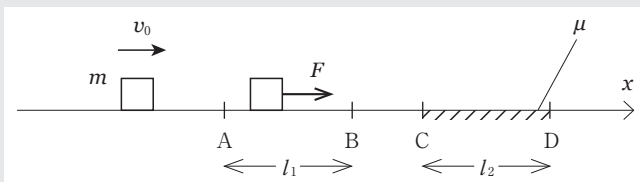
エネルギーと仕事の関係

(はじめのエネルギー) + (外からされた仕事) = (あとのエネルギー)

やってみよう /

Q

質量 m の物体が水平な x 軸上を速度 v_0 で運動している。 x 軸上の2点 AB間の距離は l_1 、CD間の距離は l_2 である。また、CD間はある物体との間に動摩擦係数 μ の摩擦力がはたらくが、他の部分はなめらかである。物体が A、B 間を通過するときだけ、速度と同じ向きに一定の力 F を加え続ける。重力加速度の大きさを g とする。



つづき /

Q

(1) 物体が点 B を通過するとき、その速度はいくらになるか。

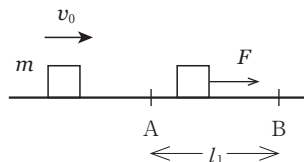
解答

エネルギーと仕事の関係より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + Fl_1 = \frac{1}{2}mv_B^2$$

 $v_B > 0$ だから

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + \frac{2Fl_1}{m}} \dots \text{答}$$

つづき /
Q

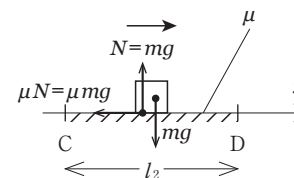
(2) 物体が点 D を通過するとき、その速度はいくらになるか。
また、物体が点 D を通過するための l_2 の条件を示せ。

解答

エネルギーと仕事の関係より

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + (-\mu mgl_2) = \frac{1}{2}mv_D^2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + Fl_1 - \mu mgl_2 = \frac{1}{2}mv_D^2$$

 $v_D > 0$ だから

$$v_D = \sqrt{v_0^2 + \frac{2Fl_1}{m} - 2\mu gl_2} \dots \text{答}$$

物体が点 D を通過するためには、 $v_D > 0$ であればよいから

$$v_0^2 + \frac{2Fl_1}{m} - 2\mu gl_2 > 0$$

$$l_2 < \frac{mv_0^2 + 2Fl_1}{2\mu mg} \dots \text{答}$$

47

重力による位置エネルギー

◎ 解説動画



\ 押さえよ /

重力による位置エネルギー $U = mgh$

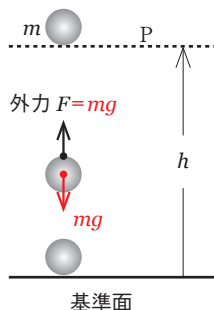
復習

エネルギーと仕事の関係

(はじめのエネルギー) + (外からされた仕事) = (あとのエネルギー)

⬇ 基準面から高さ h の点 P にある質量 m の物体がもつエネルギーは、どのように表されるか？

はじめ、基準面に置かれた物体がもつエネルギーは 0 である。この物体に大きさ $F = mg$ の外力を加え、高さ h の点 P まで力のつりあいを保ちながらゆっくりと運ぶとき、外力のする仕事は mgh と表される。したがって、エネルギーと仕事の関係より、基準面から高さ h の点 P にある質量 m の物体がもつエネルギーは mgh と表され、これを **重力による位置エネルギー** という。



POINT

重力による位置エネルギー $U = mgh$

⬇ そもそも位置エネルギーとは何なのか？

一般に位置エネルギーは、次のように定義される。

POINT

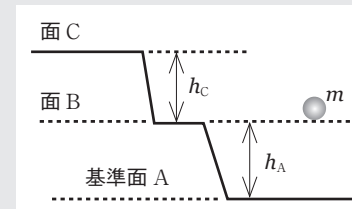


位置エネルギーの定義

「基準点からその点まで物体を運ぶとき、外力のした仕事」

\ やって
みよう /

基準面を A とした場合、面 B と同じ高さにある質量 m の物体がもつ重力による位置エネルギー U_A は、どのように表されるか。また、基準面を B や C に変えた場合、重力による位置エネルギー U_B , U_C はどのように表されるか。



解答

 $U_A = mgh_A$ …… 答 $U_B = 0$ …… 答 $U_C = -mgh_C$ …… 答

重力による位置エネルギーの基準点は、どこにとってもよいが、その位置を**明確**にする必要がある。

48

位置エネルギーの特徴

◎ 解説動画

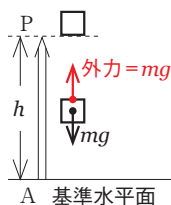


復習

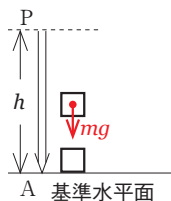
位置エネルギーの定義

「基準点からその点まで物体を運ぶとき、外力のした仕事」

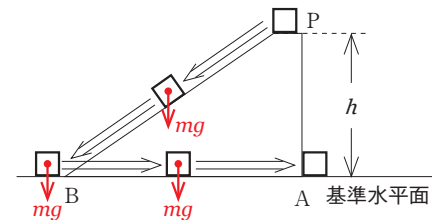
- ⬇ 基準水平面上の点 A から高さ h の点 P まで質量 m の物体を静かに運ぶとき、外力のした仕事はいくらか？
また、それは何を表しているか？

 mgh 、物体が点 P でもつ重力による位置エネルギー

- ⬇ 上とは逆に、点 P から点 A まで物体を運ぶとき、重力のした仕事はいくらか？ また、それは何を表しているか？

 mgh 、物体が点 P でもつ重力による位置エネルギー

- ⬇ 点 P からなめらかな斜面 PB を経由して点 A まで物体を運ぶとき、重力のした仕事はいくらか？
また、それは何を表しているか？

 mgh 、物体が点 P でもつ重力による位置エネルギー

このように、重力がする仕事は基準水平面からの高さだけで決まり、経路には関係がない。一般に、その点から基準点まで物体を運ぶとき、力のする仕事が経路に無関係に2点の位置だけで決まるとき、その力を保存力という。

- ⬇ 位置エネルギーは保存力を用いてどのように定義できるか？

「その点から基準点まで物体を運ぶとき、保存力のした仕事」

このように、保存力に対しては、位置エネルギーを定めることができる。保存力としては重力のほかに、弾性力や静電気力などがある。

49

弾性力による
位置エネルギー①

◎ 解説動画



\ 押さえよ /

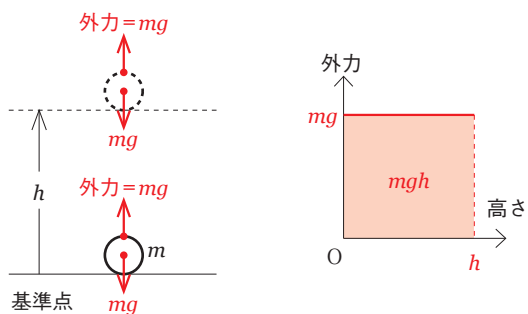
弾性力による位置エネルギー $U = \frac{1}{2} kx^2$

復習

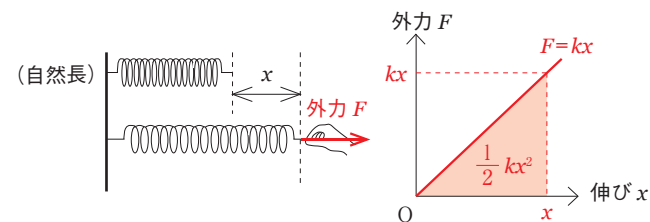
位置エネルギーの定義

「基準点からその点まで物体を運ぶとき、外力のした仕事」

復習) 質量 m の物体を基準点から高さ h の点まで静かに運ぶとき、高さと外力の関係をグラフにかけ。また、高さ h の点で物体がもつ重力による位置エネルギーは、グラフにおいてどこに表れているか。



📌 ばね定数 k のばねを自然長(基準点)から x だけ伸ばすとき、伸び x と外力 F の関係をグラフにかいてみよう。



ここで、ばねを自然長(基準点)から x だけ伸ばすまでに外力 F のした仕事は、グラフと横軸の間の面積で表され、これが弾性力による位置エネルギー U となる。したがって、

$$U = x \times kx \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} kx^2$$

POINT

弾性力による位置エネルギー $U = \frac{1}{2} kx^2$

50

弾性力による
位置エネルギー②

◎ 解説動画



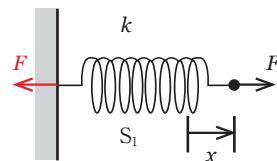
\ 押さえよ /

ばね定数は、ばねの自然長に**反比例**する。

復習

弾性力による位置エネルギー $U = \frac{1}{2} kx^2$ \ やって
みよう /

Q

ばね定数 k [N/m] のばね S_1 の一端を壁に固定し、他端を F [N] の力で引くと x [m] 伸びた。

\ つづき /

Q

(1) ばね定数 k [N/m] は、物理的に何を表しているか。

解答

フックの法則 $F = kx$ より $k = \frac{F}{x}$

1m 伸ばすのに何 N の力が必要か(ばねの伸ばしにくさ) 答

\ つづき /

Q

(2) ばね S_1 にたくわえられた弾性力による位置エネルギー U [J] はいくらか。

解答

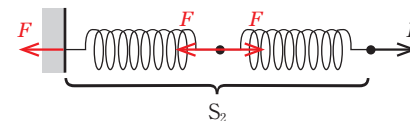
$$U = \frac{1}{2} kx^2 \quad \dots \text{答}$$

\ つづき /

Q

(3) ばね S_1 を2つ連結したばね S_2 について考える。ばね S_2 を F [N] の力で引いた。ばね S_2 のばね定数 k_2 [N/m] は k の何倍か。

解答



$$k_2 = \frac{F}{2x} = \frac{k}{2}$$

 $\frac{1}{2}$ 倍 答

\ つづき /

Q

(4) ばね S_2 にたくわえられた弾性力による位置エネルギー U_2 [J] は U の何倍か。

解答

$$U_2 = \frac{1}{2} k_2 (2x)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{2} \cdot 4x^2 = kx^2$$

$$U_2 = 2U$$

2 倍 答

\ つづき /

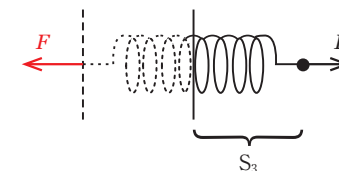
Q

(5) ばね S_1 を半分に切断したばね S_3 について考える。ばね S_3 を F [N] の力で引いた。ばね S_3 のばね定数 k_3 [N/m] は k の何倍か。

解答

$$k_3 = \frac{F}{\frac{x}{2}} = \frac{2F}{x} = 2k$$

2 倍 答



\ つづき /

Q

(6) ばね S_3 にたくわえられた弾性力による位置エネルギー U_3 [J] は U の何倍か。

解答

$$U_3 = \frac{1}{2} k_3 \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{kx^2}{4}$$

$$U_3 = \frac{U}{2}$$

 $\frac{1}{2}$ 倍 答

POINT

ばね定数は、ばねの自然長に**反比例**する。

51

力学的エネルギー
保存則①

◎ 解説動画



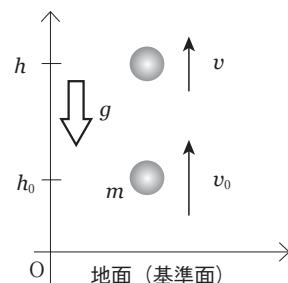
\ 押さえよ /



力学的エネルギー保存則

$$\text{運動エネルギー} + \text{位置エネルギー} = \text{一定}$$

地面を原点 O とし、鉛直上向きを座標軸正の向きとする。高さ h_0 の点から速さ v_0 で投げ上げられた質量 m の物体は、高さ h の点で速さが v になった。この運動は、加速度 $-g$ の等加速度直線運動である。



📌 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ を用いて、運動エネルギーと位置エネルギーの関係を考えよう。

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot (-g) \cdot (h - h_0)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh + mgh_0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0$$

ここで、運動エネルギーと位置エネルギーの和を**力学的エネルギー**という。力学的エネルギーは位置によらず**一定**に保たれることがわかる。この関係を**力学的エネルギー保存則**という。

POINT



力学的エネルギー保存則

$$\text{運動エネルギー} + \text{位置エネルギー} = \text{一定}$$

一般に、物体にはたらく力が、重力や弾性力のような**保存力**だけの場合、この法則は成り立つ。(物体に保存力以外の力がはたらいなくても仕事をしなければ、この法則は成り立つ)

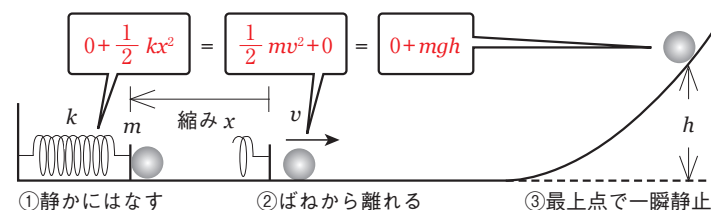
POINT



力学的エネルギー保存則が成立しない例

- ・ 摩擦や抵抗**力**のある運動
- ・ $e \neq 1$ の衝突

📌 ①～③の力学的エネルギーとその関係について考えよう。



52

力学的エネルギー
保存則②

◎ 解説動画



復習

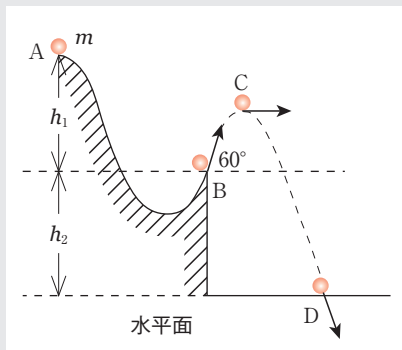
力学的エネルギー保存則

運動エネルギー + 位置エネルギー = 一定

やってみよう /

Q

高低差 h_1 のなめらかな曲面 AB があり、B 端の傾斜角は 60° になっている。また、B 端と水平面との高低差は h_2 である。いま、小球を点 A に静かに置いたところ、小球は B 端を経て、放物運動の最高点 C を経由し、水平面上の点 D に落下した。重力加速度の大きさを g とする。

つづき /
Q

(1) B 端での小球の速さはいくらか。

解答

力学的エネルギー保存則より

$$0 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0$$

 $v_B > 0$ だから

$$v_B = \sqrt{2gh_1} \dots \dots \text{答}$$

つづき /
Q

(2) 2 点 B, C の高低差はいくらか。

解答

力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + 0 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_B}{2}\right)^2 + mgh_{BC}$$

$$mgh_1 = \frac{m}{2} \cdot \frac{2gh_1}{4} + mgh_{BC}$$

$$h_{BC} = \frac{3h_1}{4} \dots \dots \text{答}$$

つづき /
Q

(3) 点 D に落下する直前の小球の速さはいくらか。

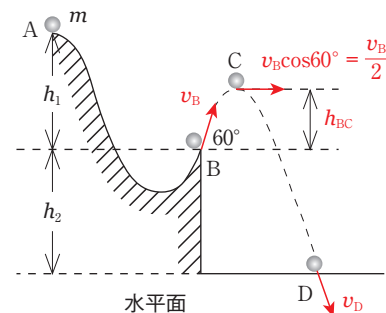
解答

力学的エネルギー保存則より

$$0 + mg(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}mv_D^2 + 0$$

 $v_D > 0$ だから

$$v_D = \sqrt{2g(h_1 + h_2)} \dots \dots \text{答}$$



53

力学的エネルギー
保存則③

◎ 解説動画



復習

力学的エネルギー保存則

$$\text{運動エネルギー} + \text{位置エネルギー} = \text{一定}$$

やってみよう /

Q

ばね定数 k のばねの一端を天井に固定し、他端に質量 m のおもりを取りつけ、鉛直につるす。ばねが自然長になるようにおもりを手で支え、静かに手をはなすと、おもりは振動を始める。重力加速度の大きさを g とする。

つづき /

Q

(1) ばねの最大の伸びはいくらか。

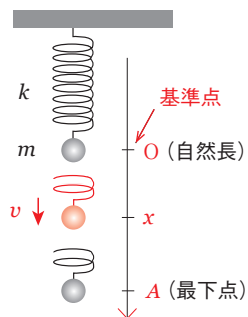
解答

力学的エネルギー保存則より

$$0 = \frac{1}{2} kA^2 - mgA$$

 $A \neq 0$ だから

$$A = \frac{2mg}{k} \dots \text{答}$$

つづき /
Q(2) ばねの伸びが x のとき、おもりの速さはいくらか。

解答

力学的エネルギー保存則より

$$0 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 - mgx$$

 $v > 0$ だから

$$v = \sqrt{2gx - \frac{kx^2}{m}} \dots \text{①} \dots \text{答}$$

つづき /
Q

(3) おもりの速さの最大値と、そのときのばねの伸びはいくらか。

解答

①式を平方完成すると

$$v = \sqrt{-\frac{k}{m} \left(x - \frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{mg^2}{k}}$$

ばねの伸び $x = \frac{mg}{k}$ のとき、おもりの速さは

$$\text{最大値 } g\sqrt{\frac{m}{k}} \dots \text{答}$$

補足

平方完成

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

54

運動量保存則と
エネルギー保存則①

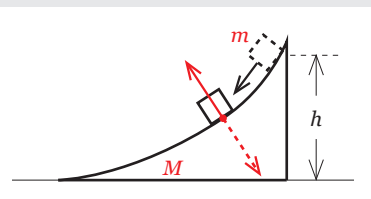
◎ 解説動画



やってみよう /

Q

なめらかな水平面上に、なめらかな曲面をもつ質量 M の台が静止している。水平面からの高さ h の台上に、質量 m の小物体を静かに置くと、両物体は動き始める。小物体が台から離れた後の、両物体の速度を求めよ。重力加速度の大きさを g とする。



解答

運動量保存則(水平方向)

離れた後の小物体、台の速度を右向きを正として、それぞれ v , V とする。

$$0 = mv + MV \quad \cdots \textcircled{1}$$

復習

外力を受けていない \Rightarrow 運動量保存則が成立

力学的エネルギー保存則より

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①より

$$V = -\frac{mv}{M} \quad \cdots \textcircled{3}$$

③を②に代入して

$$mgh = \frac{m}{2}v^2 + \frac{M}{2} \cdot \frac{m^2v^2}{M^2}$$

$$gh = \frac{(M+m)v^2}{2M}$$

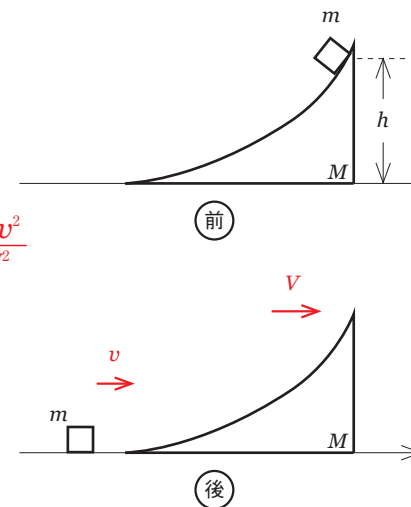
ここで、 $v < 0$ だから

$$v = -\sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}$$

これを③に代入して

$$V = -\frac{m}{M} \times \left(-\sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}} \right)$$

$$= m \sqrt{\frac{2gh}{M(M+m)}}$$

小物体：左向きに $\sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}$ 台：右向きに $m \sqrt{\frac{2gh}{M(M+m)}}$ 答

55

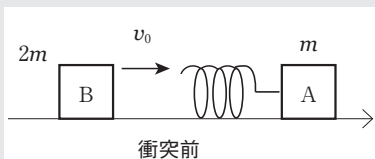
運動量保存則と
エネルギー保存則②

◎ 解説動画

やって
みよう /

Q

ばね定数 k の軽いばねをつけた質量 m の物体 A が、なめらかな水平面にある座標軸上で静止している。質量 $2m$ の物体 B が、座標軸上を速度 v_0 で進み、ばねの方から衝突した。



つづき /

Q

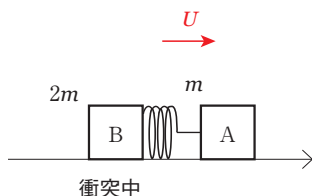
(1) 両物体の速度が同じになったとき、その速度 U はいくらか。

解答

運動量保存則より

$$2mv_0 = 3mU$$

$$U = \frac{2v_0}{3} \dots \text{答}$$



つづき /

Q

(2) ばねの最大の縮み x はいくらか。

解答

力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2} \cdot 2m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot U^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$2mv_0^2 = 3m \times \frac{4v_0^2}{9} + kx^2$$

$$\frac{2mv_0^2}{3} = kx^2$$

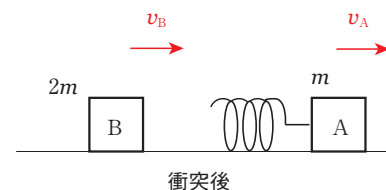
 $x > 0$ だから

$$x = v_0 \sqrt{\frac{2m}{3k}} \dots \text{答}$$

つづき /
Q

(3) 衝突後、A、B の速度は v_A 、 v_B となった。 v_A 、 v_B を求めよ。

解答



運動量保存則より

$$2mv_0 = mv_A + 2mv_B$$

$$v_A + 2v_B = 2v_0 \dots \text{①}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{エネルギー保存則} \\ \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} mv_A^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m v_B^2 \end{array} \right)$$

秘

テクニック

2 物体の弾性衝突において

エネルギー保存則(の代わりに) \Rightarrow はね返り係数 $e = 1$

解答

はね返り係数の式

$$1 = - \frac{v_B - v_A}{v_0}$$

$$-v_A + v_B = -v_0 \dots \text{②}$$

①+②より

$$3v_B = v_0$$

$$v_B = \frac{v_0}{3} \dots \text{答}$$

これを①に代入して

$$v_A + 2 \times \frac{v_0}{3} = 2v_0$$

$$v_A = \frac{4v_0}{3} \dots \text{答}$$

56

慣性力①

◎ 解説動画



\ 押さえよ /

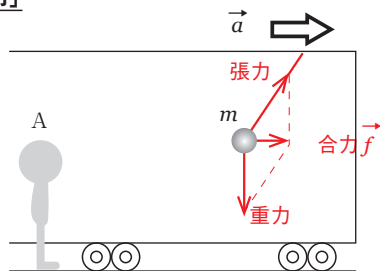


慣性力

向き ⇒ 観測者の加速度と**逆向き**大きさ ⇒ **ma**

加速度 \vec{a} で運動している電車の天井から質量 m のおもりをつるすと、糸が傾き、おもりは電車に対して静止する。地上に静止している観測者 A と電車内の観測者 B は、この現象をどのように説明するだろうか。

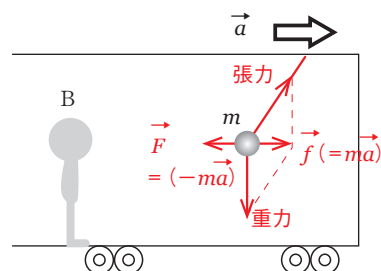
[観測者 A の説明]



「質量 m のおもりは**重力**と**張力**を受け、その**合力 \vec{f}** によって**加速度 \vec{a}** が生じている。」すなわち、おもりに対しては次の**運動方程式**が成り立つ。

$$m\vec{a} = \vec{f}$$

[観測者 B の説明]

秘
テクニック

物体にはたらく力の
見つけかた

1. 重力
2. 近接力
3. **慣性力**

「質量 m のおもりには、**重力**と**張力**の他に、ある種の力 **$\vec{F} (= -m\vec{a})$** がはたらき、これらの力が**つりあっている**。」

一般に、大きさ a の加速度で運動している観測者が、質量 m の物体を見た場合、物体には1. **重力**、2. **近接力**のほかに、観測者の加速度と**逆向き**に、大きさ **ma** の力がはたらいっているように見える。加速度運動している観測者にだけ見えるこの力を**慣性力**という。

POINT



慣性力

向き ⇒ 観測者の加速度と**逆向き**大きさ ⇒ **ma**

57

慣性力②

◎ 解説動画



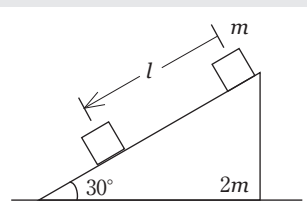
\ 押さえよ /



慣性力

向き \Rightarrow 観測者の加速度と**逆**向き大きさ \Rightarrow **ma** \ やって
みよう /

なめらかな水平面上に傾斜角 30° 、質量 $2m$ の三角台を置く。三角台のなめらかな斜面上に質量 m の小物体を静かに置いたところ、両物体は動き始めた。小物体が三角台の斜面上を距離 l だけすべり降りるのに要する時間を求めよ。重力加速度の大きさを g とする。

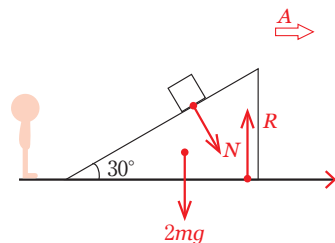


◎ 解答

水平面上に静止した観測者から見た三角台の運動について考える。

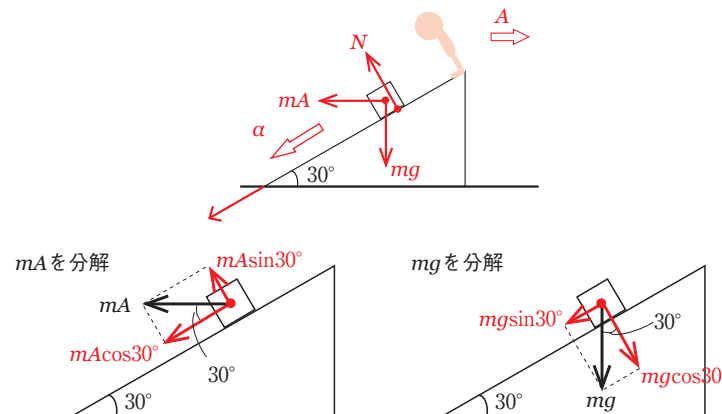
三角台の**運動方程式**より

$$2mA = \frac{N}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$



◎ 解答

三角台上から見た小物体の運動について考える。



斜面に**垂直**な方向の力のつりあいより

$$N + mA \sin 30^\circ = mg \cos 30^\circ$$

$$N + \frac{mA}{2} = \frac{\sqrt{3}mg}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

斜面に**平行**な方向の**運動方程式**より

$$ma = mg \sin 30^\circ + mA \cos 30^\circ$$

$$ma = \frac{mg}{2} + \frac{\sqrt{3}mA}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

①, ②より N を消去

$$N = 4mA$$

$$4mA + \frac{mA}{2} = \frac{\sqrt{3}mg}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}g}{9}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}g}{9} \text{ を } \textcircled{3} \text{ に代入 } a = \frac{g}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}g}{9} = \frac{2g}{3}$$

$$l = \frac{1}{2}at^2 \text{ より } t > 0 \text{ だから}$$

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{2l \times \frac{3}{2g}} = \sqrt{\frac{3l}{g}} \quad \dots \text{答}$$

58

等速円運動①

◎ 解説動画



\ 押さえよ /

 $180^\circ = \pi \text{ rad}$, 弧の長さ $l = r\theta$

等速円運動について

角速度 $\omega = \frac{\theta}{t}$, 速さ $v = r\omega$ 周期 $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$, 回転数 $n = \frac{1}{T}$

[弧度法(ラジアン)]

半径に等しい長さの弧に対する中心角
を1ラジアン [rad] とする。

⬇ 360° は何 rad か? また, 180° , 30°

はそれぞれ何 rad か?

$$r : l = 2\pi r : x$$

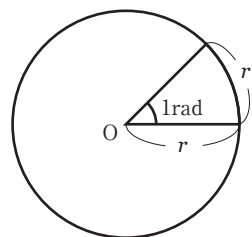
$$x = 2\pi \quad 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

⬇ θ [rad] に対する弧の長さ l を, 半径 r を用いて表そう。

$$l = r\theta$$

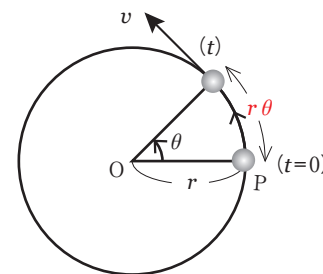


POINT

 $180^\circ = \pi \text{ rad}$, 弧の長さ $l = r\theta$

[速度と角速度]

物体が円周上を一定の速さでまわる運動を**等速円運動**という。物体Pが半径 r [m] の円周上を一定の速さ v [m/s] で運動し, t [s] 間に θ [rad] 回転したとすると, 移動距離は, $vt = r\theta$ と表される。した



がって, 物体Pの速さ v は $v = \frac{r\theta}{t}$ …①となる。この式の $\frac{\theta}{t}$ は

1秒あたりの回転角を表し, これを**角速度**といい, ω で表す。角速度の単位は [rad/s] である。 $\omega = \frac{\theta}{t}$ を用いて①式をかき換えると $v = r\omega$ …②が得られる。

[周期と回転数]

物体Pは, 1周 $2\pi r$ [m] を速さ v [m/s] で円運動しているので, 1回転するのに要する時間, すなわち円運動の**周期** T [s] は,

$$T = \frac{2\pi r}{v} \text{ と表される。また, ②を用いると } T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ と表すこと}$$

もできる。Pが1秒間に回転する回数を**回転数**といい, 単位は**ヘルツ** [Hz] である。回転数を n [Hz] とすると, $n = \frac{1}{T}$ と表される。

POINT



等速円運動のまとめ

角速度 $\omega = \frac{\theta}{t}$, 速さ $v = r\omega$ 周期 $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$, 回転数 $n = \frac{1}{T}$

59

等速円運動②

◎ 解説動画



\ 押さえよ /



等速円運動の加速度 $a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$ (円の中心向き)

復習

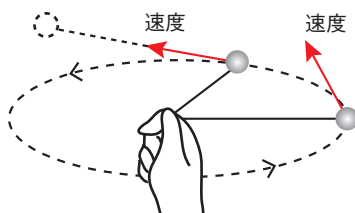
$180^\circ = \pi \text{ rad}$, 弧の長さ $l = r\theta$

以下, 等速円運動について

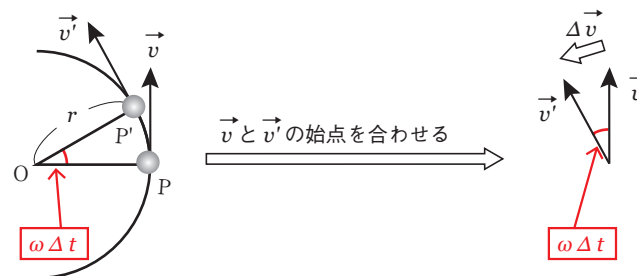
角速度 $\omega = \frac{\theta}{t}$, 速さ $v = r\omega$

周期 $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$, 回転数 $n = \frac{1}{T}$

糸の先におもりをつけて水平面内で等速円運動させる。糸を突然はなすと、おもりは円の接線方向に飛んでいく。つまり、等速円運動をする物体の速度 \vec{v} は、常に円の接線方向を向いている。等速円運動では、速度の大きさ(速さ)は変わらないが、向きを変化させる加速度が生じている。



⬇ 等速円運動の加速度を求めよう。



物体が点 O を中心に半径 r 、速さ v の等速円運動をしている。物体が短い時間 Δt の間に、点 P から P' へ移動し、速度が \vec{v} から \vec{v}' になったとすると、物体の加速度 \vec{a} は

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{\Delta t}$$

この円運動の角速度を ω とすると、 $\angle POP'$ は $\omega \Delta t$ であるから、 \vec{v} と \vec{v}' のなす角も $\omega \Delta t$ となる。 \vec{v} と \vec{v}' の大きさは等しいから、 $\omega \Delta t$ がきわめて小さいとき、 $\Delta \vec{v}$ は円の中心を向く。したがって、加速度 \vec{a} は円の中心を向く。また、 $\Delta \vec{v}$ の大きさ Δv は

$$\Delta v = v \omega \Delta t$$

であるから、 \vec{a} の大きさ a は次の式で表される。

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v \omega = r \omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

POINT



等速円運動の加速度 $a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$ (円の中心向き)

60

等速円運動③

◎ 解説動画



\ 押さえよ /



$$\text{向心力 } F = m \frac{v^2}{r} = mr\omega^2 \text{ (円の中心向き)}$$

等速円運動をしている物体は、円の**中心**に向かう加速度をもっており、その大きさ a は

$$a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

である。したがって、物体の質量を m とすると、この物体にはたらく力の大きさ F は

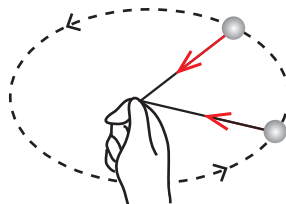
$$F = ma = m \frac{v^2}{r} = mr\omega^2$$

と表され、その向きは**加速度**と同じ円の**中心**向きである。物体を円運動させるのに必要なこの力を**向心力**という。

POINT



$$\text{向心力 } F = m \frac{v^2}{r} = mr\omega^2 \text{ (円の中心向き)}$$



\ まとめ /



$$\text{角速度 } \omega = \frac{\theta}{t} \quad \text{速度 } v = r\omega \text{ (円の接線方向)}$$

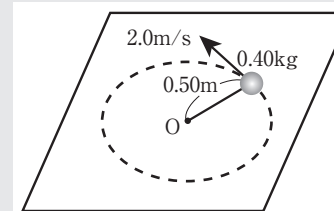
$$\text{周期 } T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{回転数 } n = \frac{1}{T}$$

$$\text{加速度 } a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \text{ (円の中心向き)}$$

$$\text{向心力 } F = m \frac{v^2}{r} = mr\omega^2 \text{ (円の中心向き)}$$

\ やって
みよう /

なめらかな水平面上で、長さ 0.50m の糸の一端を点 O に固定し、他端に質量 0.40kg の小球をつけて、速さ 2.0m/s で等速円運動させた。



\ つづき /



(1) 小球の角速度を求めよ。

解答

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2.0}{0.50} = 4.0 \text{ rad/s} \quad \text{..... 答}$$

\ つづき /



(2) 小球の加速度の向きと大きさを求めよ。

解答

$$\text{円の中心 O の向き} \quad a = \frac{v^2}{r} = \frac{2.0^2}{0.50} = 8.0 \text{ m/s}^2 \quad \text{..... 答}$$

\ つづき /



(3) 糸の張力を求めよ。

解答

$$S = m \frac{v^2}{r} = 0.40 \times \frac{2.0^2}{0.50} = 3.2 \text{ N} \quad \text{..... 答}$$