

61

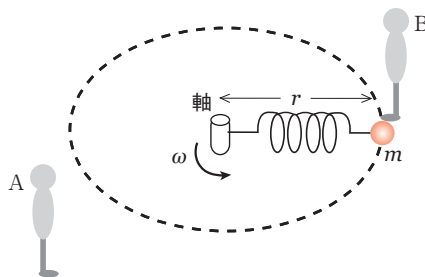
遠心力①

◎ 解説動画


 \押さえよ/
→

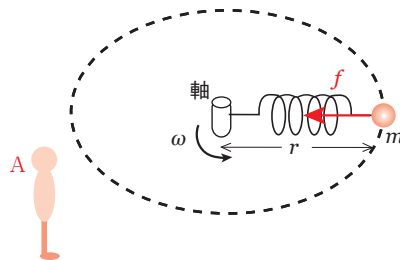
遠心力は**慣性力**であり、
加速度運動をしている**観測者**にだけ見える力である。

水平でなめらかな床に回転する軸を取りつけ、その軸にばねの一端を固定する。ばねの他端には質量 m のおもりをつけて、軸を角速度 ω で回転させる。このときばねは少し伸びて長さが r となり、おもりは等速円運動をする。地上に静止している観測者 A とおもりの上に乗っている観測者 B は、この現象をどのように説明するだろうか。



[観測者 A の説明]

観測者 A は「伸びたばねの**弾性力** f が**向心力**になって、おもりは半径 r の**等速円運動**をしている」と説明する。

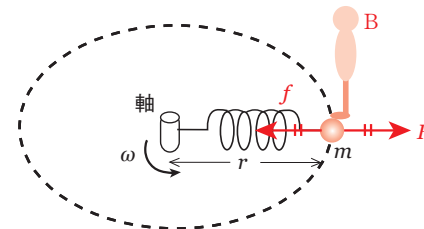


すなわち、おもりに対しては、次の**運動方程式**が成り立つ。

$$m \cdot r \omega^2 = f \quad \cdots ①$$

[観測者 B の説明]

観測者 B は「おもりは B の足元に**静止**し、おもりにはばねの**弾性力** f のほかに、 f と大きさが**等しく**、**逆向き**の力 F がはたらいっている」と説明する。



すなわち、おもりに対しては、次の**力のつりあい**が成り立つ。

$$F = f \quad \cdots ②$$

ところで、力 F とは、いったいどんな力なのだろうか。

復習

慣性力

向き ⇒ 観測者の加速度と**逆向き**

大きさ ⇒ ma

観測者 B は、おもりとともに円の**中心**を向く大きさ $r\omega^2$ の加速度運動をしている。加速度運動をしている B から見ると、おもりには B の加速度と**逆向き**(中心から**遠ざかる向き**)に、大きさ $m \cdot r \omega^2$ の**慣性力**がはたらいっているように見える。この力が上の力 F であり、**遠心力**とよばれる力である。したがって、②式は $mr\omega^2 = f$ と表され、①式と同じ形になることがわかる。

62

遠心力②

◎ 解説動画



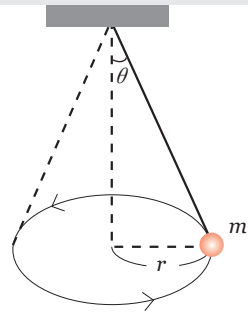
復習

遠心力は慣性力であり、加速度運動をしている観測者にだけ見える力である。

やってみよう /

Q

糸の一端を天井に固定し、他端に質量 m のおもりをつける。糸は鉛直方向に対して角度 θ を保ち、おもりは半径 r の等速円運動をする。重力加速度の大きさを g とする。



つづき /

Q

(1) 地上に静止している観測者 A の立場で式を立て、糸の張力 S とおもりの角速度 ω を求めよ。

解答

水平方向の運動方程式より

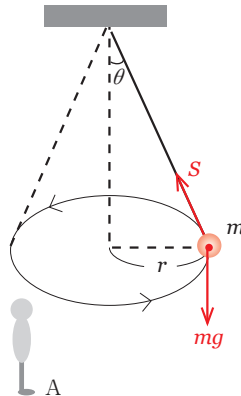
$$m r \omega^2 = S \sin \theta \quad \cdots \textcircled{1}$$

鉛直方向の力のつりあいより

$$m g = S \cos \theta \quad \cdots \textcircled{2}$$

②より

$$S = \frac{m g}{\cos \theta} \quad \cdots \text{答}$$



① ÷ ② より

$$\frac{r \omega^2}{g} = \tan \theta$$

$\omega > 0$ だから

$$\omega = \sqrt{\frac{g \tan \theta}{r}} \quad \cdots \text{答}$$

つづき /

Q

(2) おもりとともに等速円運動をしている観測者 B の立場で式を立て、おもりの速さと円運動の周期を求めよ。

解答

力のつりあいより

$$\text{水平方向: } m \frac{v^2}{r} = S \sin \theta \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{鉛直方向: } m g = S \cos \theta \quad \cdots \textcircled{4}$$

③ ÷ ④ より

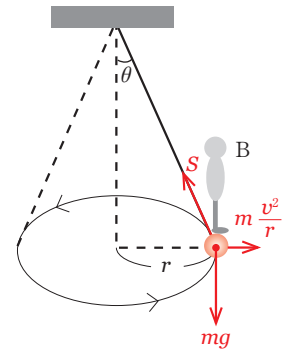
$$\frac{v^2}{g r} = \tan \theta$$

$v > 0$ だから

$$v = \sqrt{g r \tan \theta} \quad \cdots \text{答}$$

$$\text{周期 } T = \frac{2 \pi r}{v} = \frac{2 \pi r}{\sqrt{g r \tan \theta}}$$

$$= 2 \pi \sqrt{\frac{r}{g \tan \theta}} \quad \cdots \text{答}$$



63

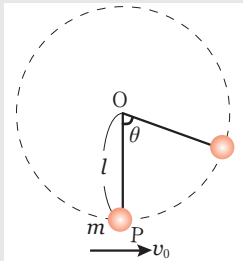
鉛直面内の円運動

◎ 解説動画

\\ やって
みよう /

Q

長さ l の糸の一端を点 O に固定し、他端に質量 m の小球をつける。最下点 P で小球に水平方向の速さ v_0 を与え、点 O を含む鉛直面内で運動をさせた。重力加速度の大きさを g として、次の問いに答えよ。



\\ つづき /

Q

(1) 小球が円周上を進み、 OP と糸が角度 θ をなす位置まで上がったとき、糸の張力の大きさを求めよ。

◎ 解答

向心方向の運動方程式より

$$m \frac{v^2}{l} = T - mg \cos \theta \quad \cdots \textcircled{1}$$

力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

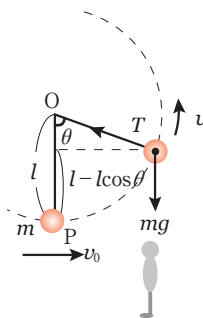
$\textcircled{2} \times \frac{2}{l}$ より

$$\frac{mv^2}{l} = \frac{mv_0^2}{l} - 2mg(1 - \cos \theta)$$

これを $\textcircled{1}$ に代入

$$\frac{mv_0^2}{l} - 2mg(1 - \cos \theta) = T - mg \cos \theta$$

$$T = \frac{mv_0^2}{l} + mg(3 \cos \theta - 2) \quad \cdots \textcircled{3} \quad \cdots \text{答}$$

\\ つづき /
Q

(2) 小球が円周上を進み、最上点を通るための v_0 の条件を求めよ。

◎ 解答

$\textcircled{3}$ 式において、 $\theta = \pi$ のとき、 $T \geq 0$ であればよいから

$$T = \frac{mv_0^2}{l} - 5mg \geq 0$$

$v_0 > 0$ だから

$$v_0 \geq \sqrt{5gl} \quad \cdots \text{答}$$

64

ケプラーの法則①

◎ 解説動画



ケプラーの法則

第1法則：惑星は太陽を1つの焦点とする**楕円**軌道を公転する。

第2法則：太陽と惑星を結ぶ線分が、単位時間に通過する**面積**は、**惑星ごと**に一定である。

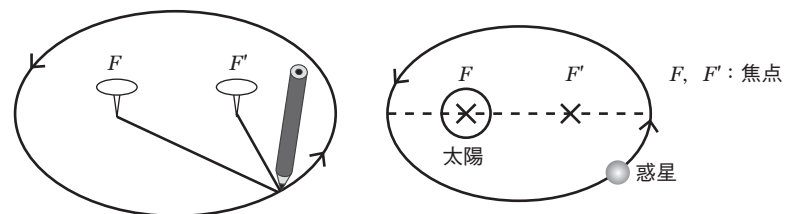
(**面積速度一定**の法則)

第3法則：惑星の公転周期 T の**2乗**と軌道楕円の半長軸 a の**3乗**との比は、**どの惑星**についても一定である。

$$\frac{T^2}{a^3} = k \quad (\text{どの惑星でも同じ値})$$

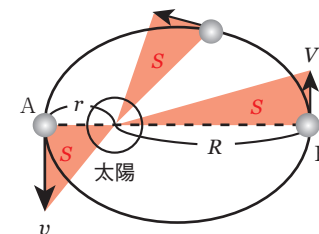
📌 楕円とは何か？ 楕円の焦点はどこか？

数学では楕円を「2点からの距離の和が一定の点の集合」と定義している。したがって、楕円は次のようにしてかくことができる。



📌 面積速度とは何か？

太陽と惑星を結ぶ線分と、速度ベクトルとで描ける三角形の**面積**で表される。



📌 第2法則を使ってみよう。

点A(近日点)と点B(遠日点)の間で第2法則を使うと、次のようになる。

$$\frac{1}{2}rv = \frac{1}{2}RV$$

📌 第3法則 $\frac{T^2}{a^3} = k$ を覚えよう。

$$\frac{T}{T} \frac{\text{シャツのあおやまさん}}{2a3}$$

T の単位を年、 a の単位を天文単位(太陽・地球間の平均距離)で表せば、 $k = 1$ となる。

65

ケプラーの法則②

◎ 解説動画



復習

ケプラーの法則

第1法則：惑星は太陽を1つの焦点とする**楕円**軌道を公転する。

第2法則：太陽と惑星を結ぶ線分が、単位時間に通過する**面積**は、**惑星ごとに一定**である。

(**面積速度一定の法則**)

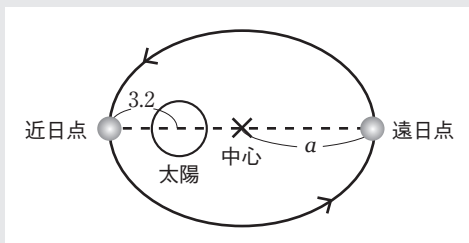
第3法則：惑星の公転周期 T の**2乗**と軌道楕円の半長軸 a の**3乗**との比は、**どの惑星**についても一定である。

$$\frac{T^2}{a^3} = k \text{ (どの惑星でも同じ値)}$$

やってみよう

Q

ある小惑星が太陽を1つの焦点とする楕円軌道を公転している。この小惑星の公転周期は8年、近日点距離は3.2天文単位であった。ただし、1天文単位は、太陽・地球間の平均距離、すなわち地球公転の半長軸の長さである。



つづき / Q

(1) この小惑星の楕円軌道の半長軸 a は、何天文単位か。

解答

地球について第3法則の k の値を求める

$$k = \frac{1^2}{1^3} = 1$$

この小惑星に第3法則を適用すると

$$\frac{8^2}{a^3} = 1$$

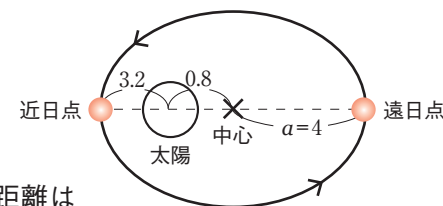
$$a^3 = 2^{2 \times 3}$$

$a = 4$ 天文単位 答

つづき / Q

(2) この小惑星の遠日点距離は、何天文単位か。

解答



太陽から楕円の中心までの距離は

$$a - 3.2 = 4 - 3.2 = 0.8 \text{ 天文単位}$$

だから、遠日点距離は

$$a + 0.8 = 4 + 0.8 = 4.8 \text{ 天文単位} \dots\dots \text{答}$$

つづき / Q

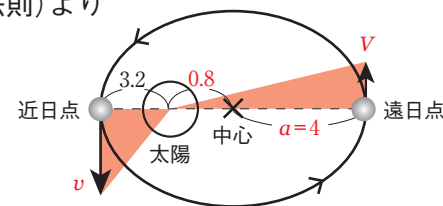
(3) この小惑星の近日点における公転速度は、遠日点における公転速度の何倍か。

解答

第2法則(**面積速度一定の法則**)より

$$\frac{1}{2} \times 3.2 \times v = \frac{1}{2} \times 4.8 \times V$$

$$\frac{v}{V} = 1.5 \text{ 倍} \dots\dots \text{答}$$



66

万有引力の法則

◎ 解説動画

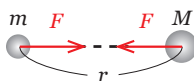


\ 押さえよ /



万有引力の大きさ $F = G \frac{mM}{r^2}$

2つの物体がおよぼし合う引力の大きさ F は、2つの物体の質量 m , M の積に **比例** し、距離の **2乗** に **反比例** する。



$$F = G \frac{mM}{r^2} \quad (G: \text{万有引力定数})$$

これを **万有引力** の法則という。

POINT



万有引力の大きさ $F = G \frac{mM}{r^2}$

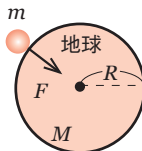
\ やって
みよう /

地球を質量 M , 半径 R の一様な球と考える。万有引力定数を G として、次の各問いに答えよ。

\ つづき /



(1) 地表面上にある質量 m の物体にはたらく重力の大きさはいくらか。



解答

$$F = G \frac{mM}{R^2} \quad \dots \text{答}$$

\ つづき /



(2) 地表面上での重力加速度の大きさはいくらか。

解答

$$mg = G \frac{mM}{R^2}$$

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \dots \text{答}$$

\ つづき /



(3) 質量 m の物体が、地球の中心を中心とする半径 r の等速円運動をしている。物体の速さはいくらか。

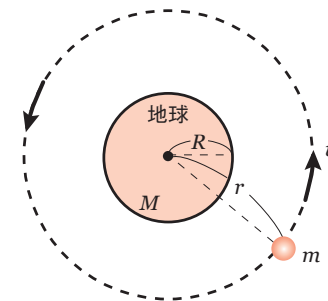
解答

運動方程式より

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}$$

$v > 0$ だから

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \dots \text{答}$$



\ つづき /



(4) (3) の等速円運動の周期はいくらか。

解答

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{GM}} \quad \dots \text{答}$$

67

万有引力による
位置エネルギー①

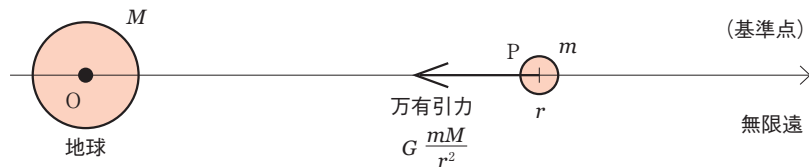
◎ 解説動画



\ 押さえよ /

万有引力による位置エネルギー $U = -G \frac{mM}{r}$

復習

万有引力の大きさ $F = G \frac{mM}{r^2}$ 

質量 M の地球の中心 O から距離 r の点 P に質量 m の物体がある。この物体がもつ万有引力による位置エネルギー U は、無限遠を基準点に選ぶと、次の式で表される。

POINT

万有引力による位置エネルギー $U = -G \frac{mM}{r}$

位置エネルギーとは何か？ 思い出してみよう。

「基準点からその点まで物体を運ぶとき、外力のした仕事」

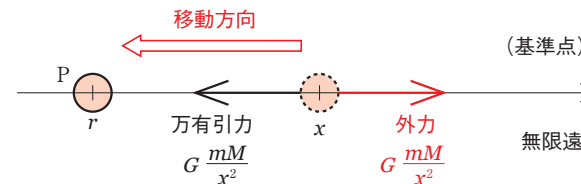
したがって、点 P における位置エネルギー U は、「無限遠から点 P まで物体を運ぶとき、外力のした仕事」を計算すれば求められる。

基準点は、なぜ無限遠にとるのか？

地球のある原点 O を基準にとると、基準点から物体を運ぶとき、原点 O における万有引力(外力)が、基準点と物体の距離が 0 になるので無限大となり、外力のした仕事を計算することができなくなってしまう。そこで、万有引力が広い範囲におよぶことを考慮して、無限遠を基準としている。

万有引力による位置エネルギーは、なぜ負の値になるのか？

基準点(無限遠)から点 P まで物体を運ぶとき、外力は正の向き、変位は負の向きなので、外力のした仕事、すなわち位置エネルギーは負の値になる。


 $U = -G \frac{mM}{r}$ の式を導いてみよう。

$$U = \int_{\infty}^r \left(G \frac{mM}{x^2} \right) dx = GmM \left[-\frac{1}{x} \right]_{\infty}^r$$

$$U = -G \frac{mM}{r}$$

68

万有引力による
位置エネルギー②

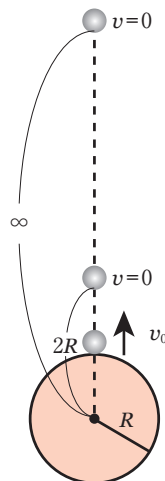
◎ 解説動画



復習 万有引力による位置エネルギー $U = -G \frac{mM}{r}$

やってみよう /
Q

地表面から鉛直上方へ初速度 v_0 で物体を打ち上げる。地球の半径を R 、地表面での重力加速度の大きさを g とし、空気抵抗は無視する。



つづき /
Q

(1) 打ち上げられた物体が、地球の中心から $2R$ の位置まで達するための v_0 の最小値はいくらか。

解答 力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM}{R} = 0 - G\frac{mM}{2R} \quad \dots ①$$

地表面での重力を考えて

$$G\frac{mM}{R^2} = mg$$

$$GM = gR^2 \quad \dots ②$$

$$\begin{aligned} \text{①より} \quad \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{GmM}{2R} \\ v_0^2 &= \frac{GM}{R} \end{aligned}$$

この式に②式を代入すると $v_0^2 = gR$

$v_0 > 0$ だから $v_0 = \sqrt{gR}$ …… 答

つづき /
Q

(2) 打ち上げられた物体が、無限の遠方に行ってしまうための v_0 の最小値はいくらか。

解答

力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM}{R} = 0$$

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{GM}{R}$$

この式に②式を代入して

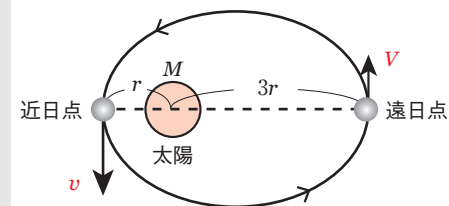
$$\frac{v_0^2}{2} = gR$$

$v_0 > 0$ だから

$$v_0 = \sqrt{2gR} \quad \dots \text{答}$$

やってみよう /
Q

質量 M の太陽から万有引力を受けて、小惑星が楕円軌道を公転している。楕円軌道の近日点距離は r 、遠日点距離は $3r$ 、万有引力定数は G とする。



つづき /
Q

(1) 小惑星の近日点での速さは、遠日点での速さの何倍か。

解答

ケプラーの第2法則より

$$\frac{1}{2}rv = \frac{1}{2}3rV$$

$$\frac{v}{V} = 3 \text{ 倍} \quad \dots \text{答}$$

つづき /
Q

(2) 小惑星の近日点での速はいくらか。

解答

エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{3}\right)^2 - G\frac{mM}{3r}$$

$v > 0$ だから

$$v = \sqrt{\frac{3GM}{2r}} \quad \dots \text{答}$$

69

等速円運動と単振動

◎ 解説動画

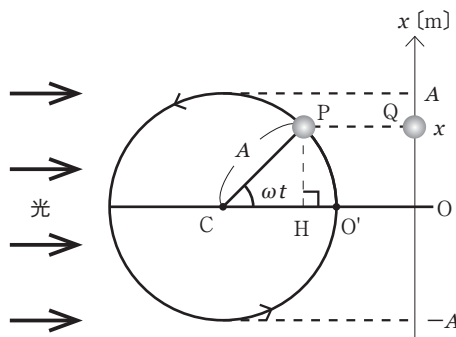


単振動

変位 $x = A \sin \omega t$, 周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$

振動数 $f = \frac{\omega}{2\pi}$, 角振動数 $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

半径 A [m], 角速度 ω [rad/s] で等速円運動をする物体 P がある。 P の x 軸上への正射影 Q は、原点 O を中心とする往復運動をする。このような運動を**単振動**といい、 A を**振幅**、1 往復するのに要する時間 T [s] を**周期**、1 秒間に往復する回数 f を**振動数**という。振動数 f の単位は**ヘルツ** [Hz] を用いる。単振動の周期 T と振動数 f は、もとの等速円運動の周期と回転数に**等しい**ので、次の関係式が成り立つ。



POINT

単振動

周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 振動数 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

P が点 O' を通過してから t [s] 経過したとき、正射影 Q の原点 O からの変位 x [m] は、

$$x = A \sin \omega t$$

と表される。この式において、 ωt を**位相**、 ω を**角振動数**という。また、 ω と f の間には次の関係式が成り立つ。

POINT

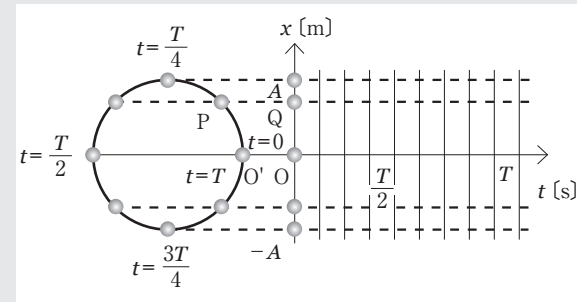


やってみよう

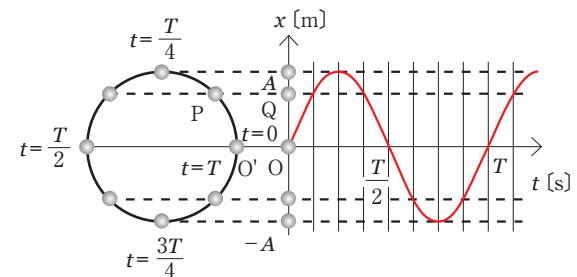
Q

$$\text{角振動数 } \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

次の図は、等速円運動する物体 P とその正射影 Q の $\frac{1}{8}$ 周期ごとの位置を表している。 Q の単振動の $x-t$ グラフを図にかき入れなさい。



解答



..... 答

70

単振動の速度・加速度①

◎ 解説動画



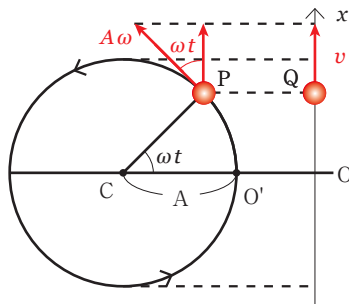
\ 押さえよ /



単振動は、等速円運動の**正射影**の運動である。

単振動の一般式 $a = -\omega^2 x$

物体Pが半径A、角速度 ω で等速円運動をしている。Pが点O'を通過してから時間が t 経過した。Pの正射影Qの運動は、**単振動**になる。ここでは、Qの単振動の速度 v と加速度 a について考える。



⬇ 単振動の速度 v について考えよう。

等速円運動をしている物体Pの速度の大きさは $A\omega$ で、その方向は円の**接線**方向である。単振動をしているQの速度 v は、Pの速度の**x成分**で表されるから、

$$v = A\omega \cos \omega t$$

となる。単振動の速さは、次のようにまとめられる。

POINT

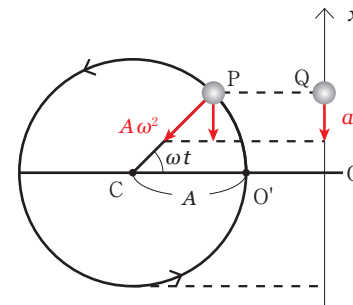


単振動の速さ $\left\{ \begin{array}{l} \text{振動の中心で最大(最大値 } A\omega) \\ \text{振動の両端で0} \end{array} \right.$

⬇ 単振動の加速度 a について考

えよう。

等速円運動をしている物体Pの加速度の大きさは $A\omega^2$ で、その向きは円の**中心**向きである。単振動をしているQの加速度 a は、Pの加速度の**x成分**で表されるから、



$$a = -A\omega^2 \sin \omega t$$

となる。Qの変位は $x = A \sin \omega t$ なので、 a は x を用いて表すと

$$a = -\omega^2 x$$

となる。この式は単振動で一般に成り立つ関係式である。

POINT



単振動の一般式 $a = -\omega^2 x$

単振動の加速度の大きさは、次のようにまとめられる。

POINT



単振動の加速度の大きさ $\left\{ \begin{array}{l} \text{振動の両端で最大(最大値 } A\omega^2) \\ \text{振動の中心で0} \end{array} \right.$

71

単振動の速度・加速度②

◎ 解説動画



復習

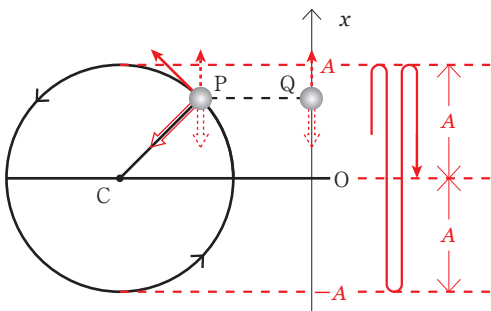
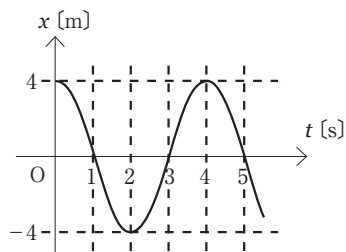
単振動の速さ $\left\{ \begin{array}{l} \text{振動の中心で最大(最大値 } A\omega) \\ \text{振動の両端で0} \end{array} \right.$

単振動の加速度の大きさ $\left\{ \begin{array}{l} \text{振動の両端で最大(最大値 } A\omega^2) \\ \text{振動の中心で0} \end{array} \right.$

やってみよう

Q

等速円運動をしている物体 P の x 軸上への正射影 Q の $x-t$ グラフをかいたところ、右の図のようになった。次の (1)～(3) に答えよ。ただし、 π は数値化せず、 π のまま用いてよい。



つづき

Q

(1) Q の振幅 A 、周期 T 、振動数 f 、角振動数 ω は、それぞれいくらか。

解答

グラフより

$$A = 4\text{m} \quad T = 4\text{s} \quad \cdots \text{答}$$

$$f = \frac{1}{T} = 0.25\text{Hz} \quad \cdots \text{答}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \text{ (rad/s)} \quad \cdots \text{答}$$

つづき

Q

(2) Q の速さが最大になる時刻 t (グラフの範囲で)、位置 x をそれぞれ求めよ。また、Q の速さの最大値 v_{\max} はいくらか。

解答

$$t = 1\text{s}, 3\text{s}, 5\text{s} \quad \cdots \text{答}$$

$$x = 0\text{m} \quad \cdots \text{答}$$

$$v_{\max} = A \cdot \frac{2\pi}{T} = 4 \times \frac{2\pi}{4} = 2\pi \text{ (m/s)} \quad \cdots \text{答}$$

つづき

Q

(3) Q の加速度の大きさが最大になる時刻 t (グラフの範囲で)、位置 x をそれぞれ求めよ。また、Q の加速度の大きさの最大値 a_{\max} はいくらか。

解答

$$t = 0\text{s}, 2\text{s}, 4\text{s} \quad \cdots \text{答}$$

$$x = \pm 4\text{m} \quad \cdots \text{答}$$

$$a_{\max} = A \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 4 \times \left(\frac{2\pi}{4}\right)^2 = \pi^2 \text{ (m/s}^2\text{)} \quad \cdots \text{答}$$

秘

テクニク

単振動で迷ったら、等速円運動に戻って考える。

72

水平方向のばね振り子

◎ 解説動画



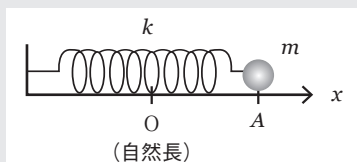
復習

単振動の一般式 $a = -\omega^2 x$

やってみよう

Q

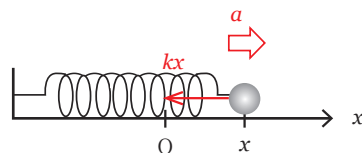
なめらかな水平面上に、一端を固定し他端に質量 m の小球をつけた、ばね定数 k のばねを置く。ばねが自然長のときの小球の位置を原点 O とし、ばねを A だけ伸ばして静かに手をはなした。



つづき

Q

(1) 小球が座標 x にあるときの加速度を a として、小球の運動方程式を立てよ。



解答

$$ma = -kx \quad \text{..... 答}$$

つづき

Q

(2) 小球の運動が単振動になることを示せ。

解答

$$ma = -kx$$

$$a = -\frac{k}{m}x \quad \cdots \textcircled{1}$$

①式は単振動の一般式 $a = -\omega^2 x$ と同じ形をして
いるので、小球の運動は単振動であるといえる 答

つづき / Q

(3) 小球の振動の中心座標と振幅を求めよ。

解答

単振動の中心では、加速度 $a = 0$ となるから、

①式より振動の中心座標は $x = 0$ 答

小球は $x = A$ より振動を始めたので、振幅は A 答

つづき / Q

(4) 小球の振動の周期を求めよ。

解答

①式と単振動の一般式 $a = -\omega^2 x$ を比べて

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$\omega > 0$ だから

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{..... 答}$$

つづき / Q

(5) 小球の速さが最大になる位置座標と速さの最大値を求めよ。

解答

単振動の速さが最大になるのは、振動の中心 $x = 0$ 答

速さの最大値は $A\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}}$ 答

つづき / Q

(6) 小球の加速度の大きさが最大になる位置座標と加速度の大きさの最大値を求めよ。

解答

加速度の大きさが最大になるのは、振動の両端 $x = \pm A$ 答

加速度の大きさの最大値は $A\omega^2 = \frac{kA}{m}$ 答

73

鉛直方向のばね振り子

◎ 解説動画



\ 押さえよ /

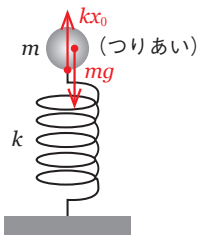
単振動の一般式(つりあいの位置が $x = x_0$ の場合)

$$a = -\omega^2(x - x_0)$$

\ やって
みよう /

Q

ばね定数 k のばねの一端を床に固定し、他端に質量 m の小球をつけると、小球はつりあいの位置に静止した。重力加速度の大きさを g とする。



\ つづき /

Q

(1) 自然長からのばねの縮み x_0 はいくらか。

解答

力のつりあいより

$$kx_0 = mg \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x_0 = \frac{mg}{k} \quad \dots \text{答}$$

\ つづき /

Q

(2) 小球をつりあいの位置から少し押し下げてはなすと、小球は鉛直方向に振動を始めた。つりあいの位置を原点 O とし、鉛直下向きを x 軸の正の向きとする。小球が座標 x にあるときの加速度を a とし、小球の運動方程式を x_0 を用いて表せ。また、小球が単振動を示すことを示せ。

解答

運動方程式より

$$ma = mg - k(x_0 + x) \quad \dots \text{答}$$

①より、 $kx_0 = mg$ なので

$$ma = mg - kx_0 - kx$$

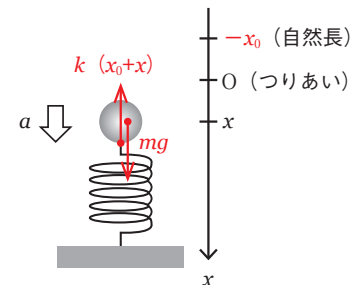
$$= -kx$$

$$a = -\frac{k}{m}x \quad \dots \textcircled{2}$$

②式は単振動の一般式

 $a = -\omega^2 x$ と同じ形をしている

ので、小球は単振動をする。…… 答



\ つづき /

Q

(3) ばねが自然長となる位置を原点 O とし、鉛直下向きを x 軸の正の向きとする。小球が座標 x にあるときの加速度を a とし、小球の運動方程式を立てよ。また、加速度 a を x_0 を用いて表せ。

解答

運動方程式より

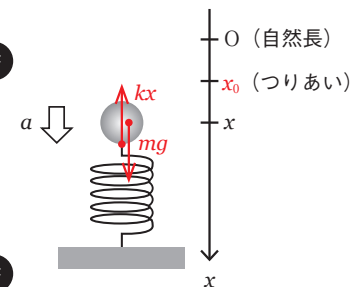
$$ma = mg - kx \quad \dots \text{答}$$

①より

$$ma = kx_0 - kx$$

$$ma = -k(x - x_0)$$

$$a = -\frac{k}{m}(x - x_0) \quad \dots \text{答}$$



POINT

単振動の一般式(つりあいの位置が $x = x_0$ の場合)

$$a = -\omega^2(x - x_0)$$

74

斜面上のばね振り子

◎ 解説動画

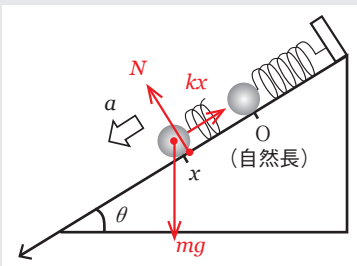


復習 単振動の一般式(つりあいの位置が $x = x_0$ の場合)

$$a = -\omega^2(x - x_0)$$

やってみよう /
Q

傾斜角 θ のなめらかな斜面上に、一端を固定し他端に質量 m の小球をつけたばね定数 k のばねを置く。ばねが自然長のときの小球の位置を原点 O とし、最大傾斜下向きを x 軸の正の向きとする。重力加速度の大きさを g とする。



つづき /
Q

(1) 小球を原点 O から静かにはなし、 x 軸上で振動させる。小球が座標 x にあるときの加速度を a として、小球の運動方程式を立てよ。

解答

$$ma = mgsin\theta - kx \quad \cdots \text{①}$$

つづき /
Q

(2) 小球の運動が単振動になることを示せ。

解答

$$\begin{aligned} \text{①より} \quad ma &= -k\left(x - \frac{mgsin\theta}{k}\right) \\ a &= -\frac{k}{m}\left(x - \frac{mgsin\theta}{k}\right) \quad \cdots \text{②} \end{aligned}$$

②式は、単振動の一般式 $a = -\omega^2(x - x_0)$ と同じ形をしているので、小球は単振動をする。…… 答

つづき /
Q

(3) 小球の振動の中心座標と振幅を求めよ。

解答

単振動の中心では、加速度 $a = 0$ となるので、②式より

振動の中心座標は

$$x = \frac{mgsin\theta}{k} \quad \cdots \text{答}$$

小球は $x = 0$ より振動を始めたので、振幅は

$$\frac{mgsin\theta}{k} \quad \cdots \text{答}$$

つづき /
Q

(4) 小球の振動の周期を求めよ。

解答

②式と単振動の一般式 $a = -\omega^2(x - x_0)$ を比べて

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$\omega > 0$ だから

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{周期 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \cdots \text{答}$$